

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ  
БУДІВНИЦТВА І АРХІТЕКТУРИ

# **ОПІР МАТЕРІАЛІВ І ТЕОРІЯ СПОРУД**

---

## **Strength of Materials and Theory of Structures**

Науково-технічний збірник  
Scientific-and-technical collected articles

---

Випуск  
Issue **103**

Заснований у 1965 р.

УДК 539.3/6  
ББК 30.121+38.112  
О-61

Головний редактор *В.А. Баженов*, д-р техн. наук  
Заступник головного редактора *С.О. Пискунов*, д-р техн. наук  
Відповідальний секретар *О.В. Геращенко*, канд. техн. наук

Редакційна колегія:

<i>П.В. Алявдін</i> , д-р техн. наук (Польща)	<i>А.В. Перельмутер</i> , д-р техн. наук
<i>Ю. Аткочіунас</i> , д-р техн. наук (Литва)	<i>О.Ф. Дащенко</i> , д-р техн. наук
<i>О.М. Белостоцький</i> , д-р техн. наук (Росія)	<i>П.В. Ясній</i> , д-р техн. наук
<i>І. Елішаков</i> , д-р техн. наук (США)	<i>В.В. Гайдайчук</i> , д-р техн. наук
<i>С.Н. Кривошапко</i> , д-р техн. наук (Росія)	<i>Г.М. Іванченко</i> , д-р техн. наук
<i>С.Ю. Фіалко</i> , д-р техн. наук (Польща)	<i>П.П. Лізунов</i> , д-р техн. наук
<i>Чан Дик Тінг</i> , д-р техн. наук (В'єтнам)	<i>І.І. Солодей</i> , д-р техн. наук
<i>Л.М. Лобанов</i> , д-р техн. наук, академік НАН України	

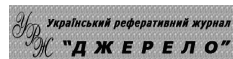
Рекомендовано до випуску Вченою радою Київського національного університету будівництва і архітектури 27 вересня 2019 р. (протокол № 26).

**Опір матеріалів і теорія споруд:** Науково-технічний збірник. – Вип. 103 / Голов. ред. В.А. Баженов. – К.: КНУБА, 2019. – 270 с. – Укр. та англ. мовами.

У збірнику наведено статті з результатами досліджень у галузі опору матеріалів, будівельної механіки, теорії пружності і пластичності. Особливу увагу приділено розробці й розвитку методів розрахунку міцності, стійкості, динаміки просторових конструкцій з урахуванням геометричної нелінійності, пластичних властивостей руйнування матеріалів; питанням чисельної реалізації рішень; дослідженню напружено-деформованого стану тіл складної структури при сталих і змінних у часі навантаженнях, включаючи випадкові впливи.

Призначений для наукових працівників, викладачів, виробників, докторантів, аспірантів та студентів.

Індексація і партнери



<http://opir.knuba.edu.ua/>  
Адреса редакційної колегії:  
КНУБА, Повітрофлотський пр., 31.  
м. Київ, 03037  
Тел.: (044) 248-3040  
E-mail: [omtc@knuba.edu.ua](mailto:omtc@knuba.edu.ua)

УДК 539.3/6  
ББК 30.121+38.112  
О-61  
© КНУБА, 2019

UDC 539.3

## EFFECT OF HEATING ON THE NATURAL VIBRATIONS OF THIN PARABOLIC SHELLS

**V.A. Bazhenov,**

Doctor of Technical Science

**O.P. Krivenko,**

Candidate of Science (Engineering)

**Yu.V. Vorona,**

Candidate of Science (Engineering)

*Kyiv National University of Construction and Architecture  
31, Povitroflotsky ave., Kyiv, Ukraine, 03680*

DOI: 10.32347/2410-2547.2019.103.3-16

The modal analysis of parabolic shells of revolution exposed to temperature field is carried out. The analysis is performed according to the method, which is based on the relations of the three-dimensional theory of thermoelasticity, a finite-element formulation of the problem in increments and uses the finite element moment scheme. A universal finite element is used to model a thin elastic shell. The finite element is based on an isoparametric solid finite element with polylinear shape functions for coordinate and displacement interpolation. Evaluation of the effect of the temperature field on the parameters of the natural vibrations of the shell is performed according to the developed method in two stages. The new stress-strain state of the structure, caused by the applied temperature field, is determined using a geometrically non-linear approach. Further, the frequencies and modes of the natural vibrations of the shell whose shape is perturbed by the action of the temperature field are calculated. The effect of uniform and non-uniform heating on the natural vibrations of parabolic shells of revolution with various heights is investigated. The vibrations of the parabolic shells modelling rocket fairings are studied. The phenomenon of aerodynamic heating of a parabolic shell (head fairing) may occur at the initial stage of entry of the carrier rocket into the atmosphere. This can lead to significant heating of the fairing surface. At the same time the shell is non-uniformly heated through the height. The considered parabolic shells are essentially deep and rather rigid. Therefore, the effect of heating on the characteristics of natural vibrations is insignificant. It has been found that shallow shells have lower frequencies and significantly different modes of natural vibration. Presented studies have shown the effectiveness of the application of the developed approach to the modal analysis of the shells.

**Keywords:** vibrations, temperature field, parabolic shell, universal solid finite element.

### Introduction

Elements of shell structures can be exposed to significant external thermal fields under real operating conditions. The presence of heating can significantly affect the dynamic characteristics of the structure. This in turn can lead to an emergency. Taking into account the action of the temperature field makes it possible to increase the reliability of determining the stress-strain state and vibrations of shell systems during their operation. This question has been insufficiently studied due to the increased complexity of such problems [1-5]. Therefore, it seems important to assess the effect of heating on the natural vibrations of thin elastic shells.

The present study is a continuation of our previous paper [6]. Modal analysis of thin parabolic shells of constant thickness, which are under the action of a temperature field, is considered. The application area of parabolic shells is

rather wide in various branches of engineering and in construction [7–9]. The most widely used constructions such as parabolic domes can be found in structural systems such as aerospace and underwater vehicles [7, 8, 10, 11]. Despite this, a relatively small number of works are devoted to their study [6, 7, 10–15].

Modal analysis is performed according to the method [1]. The technique is based on the relations of the three-dimensional theory of thermoelasticity, the finite element formulation of the problem in increments, and the use of the moment finite element scheme [16, 17]. Evaluation of the effect of the temperature field on the parameters of the shell natural vibrations is carried out in accordance with the developed technique in two stages. The new stress-strain state of the structure due to the applied temperature load (temperature field) is determined by a geometrically nonlinear method [16, 17]. Next, the frequencies and modes of natural vibrations of the shell which shape is disturbed by the action of the temperature field are calculated.

### 1. Statement of the problem

Shell structures may be under the action of different temperature loads (fields) during the operation. Such various thermomechanical conditions may occur in building, airframe, space, and other structures because of a change in the environmental conditions, a difference between the heating rates of massive ribs and thin casing of the aircraft, etc. The phenomenon of aerodynamic heating of a parabolic shell (head fairing) can occur, for example, at the initial stage of entry of the rocket fairing into the atmosphere [8]. At this stage of the flight, the air is dense enough and there is a strong heating of the fairing surface. A possible temperature distribution over the surface of the head fairing is shown in Fig. 1 (the figure is taken as an example from [8]). At the same time, room temperature 20° C is maintained inside the enclosure compartment.

The effect of uniform and non-uniform heating on the natural vibrations of parabolic shells of revolution with various heights is investigated. The vibrations of the parabolic shells modelling rocket fairings are studied. We consider paraboloids of constant thickness  $h$ , height  $H$  and radius of the support contour  $R$ . The shape of the middle surface of the shell in the Cartesian coordinate system  $x^{i'}$  is given by the equation (Fig. 2):

$$x^{1'} = H \left[ 1 - \frac{(x^{2'})^2 + (x^{3'})^2}{R^2} \right].$$

The shell is clamped at the edges and the material is isotropic ( $E$ ,  $\nu$ , and  $\alpha$  are the elastic modulus, Poisson's ratio, and linear expansion coefficient of the nonheated shell). According to [7], the input data are:  $E = 7.2 \cdot 10^4 \text{ MPa}$ ,  $\nu = 0.3$ ,  $\alpha = 0.25 \cdot 10^{-4} \text{ deg}^{-1}$ ;  $R = 2 \text{ m}$ ,  $h = 5 \text{ mm}$ . Three cases of the height are examined ( $H = 1, 2, \text{ and } 4 \text{ m}$ ). In [6], a study of the convergence and accuracy of solutions for these shells in the absence of heating have been made. Results were compared with the data from [7] and with the data obtained using the SCAD program for finite element structural analysis [18]. The finite element shell model was a half of the panel with uniform mesh along radius and

circumference. The solutions converged on  $40 \times 50$  FE mesh. Analysis has shown that the adopted design scheme excludes multiple eigenfrequencies from consideration. However, this does not interfere with the analysis of the natural vibrations of the structure, considering only single eigenfrequencies and the corresponding forms of vibrations. In general, the problem of determining the eigenfrequencies and vibration modes of the shell, which are one of the main dynamic characteristics of any elastic system, occupies an important place in the study of the behavior of any structure.

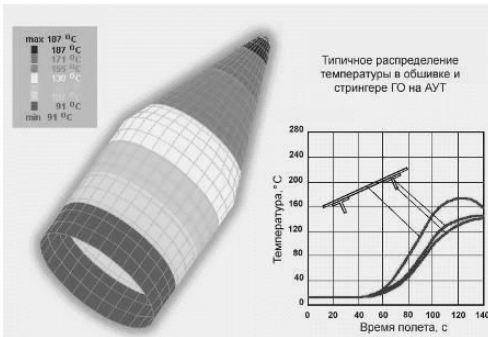


Fig. 1. An example of a temperature distribution in a fairing [8]

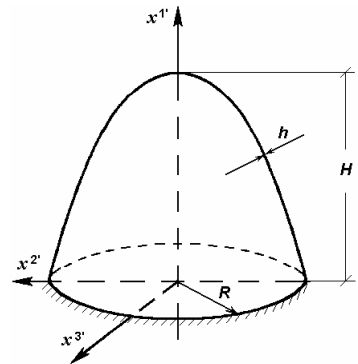


Fig. 2. Parabolic shell of revolution

Three variants of the distribution of the temperature field in the shell are considered: (i) uniform heating throughout the shell volume, (ii) uniform heating throughout the thickness and non-uniform throughout the height, (iii) non-uniform heating throughout the thickness and the height.

## 2. Analysis of natural vibrations of parabolic shells that are in a temperature field

**2.1. Uniform heating all over volume of the shell.** The effect of heating on the vibration of paraboloids of various heights ( $H = 1, 2, \text{ and } 4 \text{ m}$ ) is examined for four cases of uniform temperature increment by  $T^\circ\text{C} = 0, 50, 150, 165$ .

For paraboloids with a height of  $H = 1$  and  $2 \text{ m}$ , an increase in frequencies  $\omega_i$  is observed with an increase in the temperature increment  $T$ . We have the opposite effect for deeper shells ( $4 \text{ m}$ ), where frequencies  $\omega_i$  decrease with increasing temperature. In all cases, uniform heating of the shells practically does not affect the values of natural frequencies. Moreover, the frequency spectrum in all cases is quite dense. Noticeable vibrations occur in the middle part of the shell closer to the clamped edge with forming waves in the circumferential direction (Fig. 3). There is no wave formation at the pole of the shell.

For the shell with a height  $H = 1 \text{ m}$  (Fig. 4), heating at  $T = 50^\circ\text{C}$  is accompanied by a small increase in frequency (only 3%) (Table 1) and has little effect on the nature of the lower vibration modes. Heating at  $T = 150^\circ\text{C}$  and above leads to an increase in frequencies (up to 5%) and causes the same changes in the respective modes.

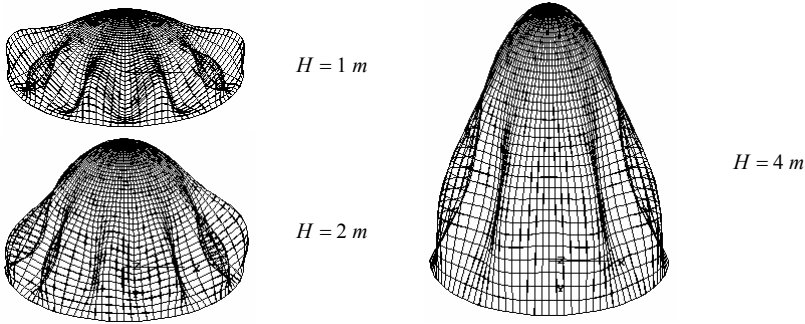


Fig. 3. Natural modes of shells with different heights ( $T = 0^{\circ}\text{C}$ )

Table 1

$\begin{matrix} \boxed{+} \\ \top \\ T^{\circ}\text{C} \end{matrix}$	$\omega_i, \text{Hz} (H = 1 \text{ m})$				
	$\omega_1$	$\omega_2$	$\omega_3$	$\omega_4$	$\omega_5$
$0^{\circ}$	230.40	230.82	231.45	232.74	233.96
$50^{\circ}$	237.08	237.41	238.18	239.20	240.81
$150^{\circ}$	242.42	242.71	243.55	244.49	246.08
$165^{\circ}$	241.90	242.18	243.03	243.96	245.57
$\Delta_0^{165^{\circ}}, \%$	5.00	4.92	5.00	4.82	4.96

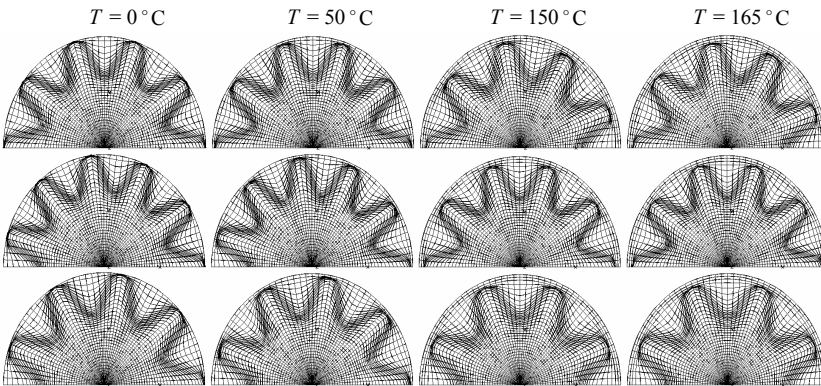


Fig. 4. The first three modes of vibrations for the shell ( $H = 1 \text{ m}$ ) uniformly heated

The insignificant effect of heating on frequency values can be explained as follows. Heating gives the shell a new shape (Fig. 5) and only slightly increases the paraboloid's height by 0.39, 1.14 and 1.24 cm, respectively. For clarity forms are presented on a significantly distorted scale.

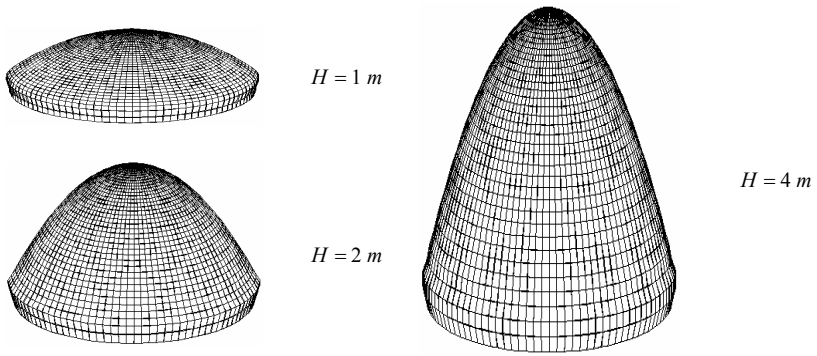


Fig. 5. The shape of the parabolic shell of various heights after uniform heating

For the shell with a height  $H = 2\text{ m}$ , heating by  $T = 50^\circ\text{C}$  or more leads to a slight increase in the vibration frequencies (up to 3%, Table 2) and the same restructuring of the modes (Fig. 6). As above, this can be explained by the change in the parabolic shape of the shell to a drop-like shape with a relatively smaller increase in height (than in the first variant) by 0.195, 0.575, 0.63%.

Table 2

<div style="border: 1px solid black; padding: 2px; display: inline-block;">+</div> $T^\circ\text{C}$	$\omega_i, \text{Hz} (H = 2\text{ m})$				
	$\omega_1$	$\omega_2$	$\omega_3$	$\omega_4$	$\omega_5$
$0^\circ$	162.57	162.69	164.48	164.83	168.47
$50^\circ$	164.19	164.26	166.11	166.42	170.17
$150^\circ$	167.19	167.61	168.77	170.07	172.47
$165^\circ$	167.61	168.07	169.14	170.57	172.81
$\Delta_{0^\circ}^{165^\circ}, \%$	3.10	3.31	2.83	3.48	2.58

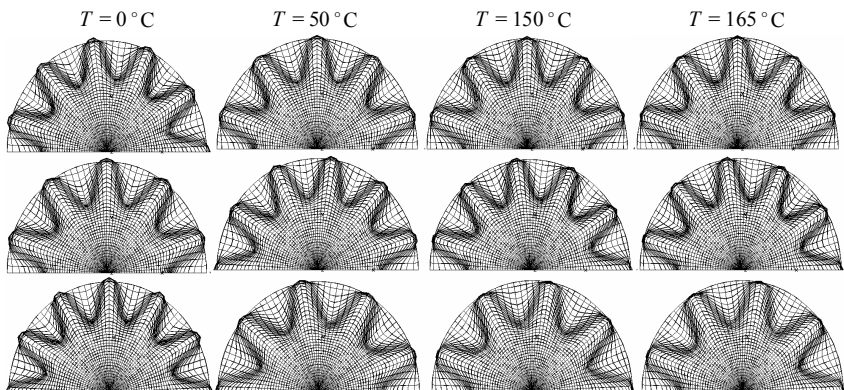
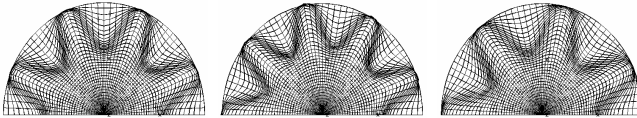


Fig. 6. The first three modes of vibrations for the shell ( $H = 2\text{ m}$ ) uniformly heated

For the shell with a height  $H = 4\text{ m}$ , heating at  $T = 165^\circ\text{C}$  has practically no effect on frequencies that decrease by less than 1% (Table 3) and does not affect the modes (Fig. 7). The corresponding modes are of the same type for an unheated and heated shell (for all considered temperature values). The relative increment of the shell height due to heating is less than 0.5%, and the shape differs insignificantly from the initial one.

Table 3

<div style="border: 1px solid black; padding: 2px; display: inline-block; text-align: center;"> <math>\begin{matrix} + \\ T \\ - \end{matrix}</math> </div> $T^\circ\text{C}$	$\omega_i, \text{Hz} (H = 4\text{ m})$				
	$\omega_1$	$\omega_2$	$\omega_3$	$\omega_4$	$\omega_5$
$0^\circ$	77.832	78.303	79.887	81.062	84.836
$50^\circ$	77.482	78.002	79.491	80.849	84.414
$150^\circ$	77.167	77.816	79.073	80.795	83.914
$165^\circ$	77.250	77.930	79.094	80.959	83.865
$\Delta_{0^\circ}^{165^\circ}, \%$	-0.75	-0.48	-0.99	-0.13	-1.14

Fig. 7. The first three vibration modes for uniformly heated shell ( $H = 4\text{ m}$ )

**2.2. Heating of the shell uniformly throughout the thickness and non-uniformly throughout the height.** We study heating of the shell which is uniform throughout the thickness and stepwise throughout the height. Let us consider four sections of a paraboloid with stepwise heating by  $T_i^\circ\text{C}$  along the axis  $x^I$ . It is assumed that the reference shell temperature is  $20^\circ\text{C}$ . In accordance with [8], such temperature increments:  $T_1 = 110$ ,  $T_2 = 135^\circ\text{C}$ ,  $T_3 = 150^\circ\text{C}$ , and  $T_4 = 165^\circ\text{C}$  are corresponded the following sections of the shell with the height  $\frac{3}{20}H$ ,  $\frac{5}{20}H$ ,  $\frac{9}{20}H$ , and  $\frac{3}{20}H$ . The first section is near clamped edges.

The effect of the stepwise distribution of temperature on the natural frequencies of the shells is examined for parabolic shells of revolution with the height 2 and 4 m (Table 4). As expected, the effect of heating on the values  $\omega_i$  is insignificant. This can be explained by the fact that the non-uniform temperature distribution has slight effect on the new shell shape after heating (Fig. 8 (a), Fig. 9 (a)). New shell shapes are similar to ones of uniformly heated shells (Fig. 5).



Table 4

$\Delta, \%$	$\begin{matrix} \square \\ + \\ \square \end{matrix}^T$ $\omega_i, Hz$				
	$\omega_1$	$\omega_2$	$\omega_3$	$\omega_4$	$\omega_5$
$H = 2 m$	167.46	167.67	169.25	169.85	173.11
$\Delta(T_i^\circ / 0^\circ)$	3.01	3.06	2.90	3.05	2.75
$\Delta(T_i^\circ / 165^\circ)$	-0.09	-0.24	0.06	-0.42	0.17
$H = 4 m$	77.795	78.307	79.737	81.078	84.566
$\Delta(T_i^\circ / 0^\circ)$	-0.05	0.005	0.008	0.02	-0.32
$\Delta(T_i^\circ / 165^\circ)$	0.70	0.48	0.81	0.15	0.84

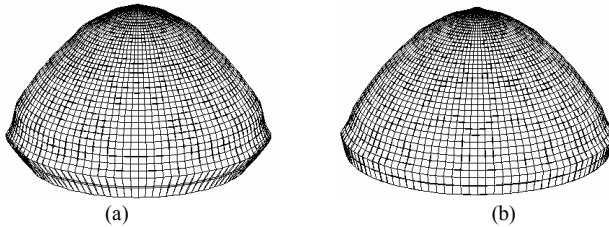


Fig. 8. Shell shapes ( $H = 2, m$ ) after stepwise heating throughout the height:  
(a) uniform heating throughout the thickness, (b) linear heating throughout the thickness

The uniform heating of the paraboloid with a height  $H = 2 m$  increases the value of the lower five natural frequencies only by 3% compared with an unheated shell ( $T = 0^\circ C$ ). Compared with a uniformly heated shell at  $T = 165^\circ C$ , this effect is practically absent and amounts to only 1%.

Taking into account the non-uniform heating for a paraboloid with a height  $H = 4 m$  practically does not affect the value of the lower five natural frequencies and is less than 1% compared with an unheated ( $T = 0^\circ C$ ) and uniformly heated ( $T = 165^\circ C$ ) shell.

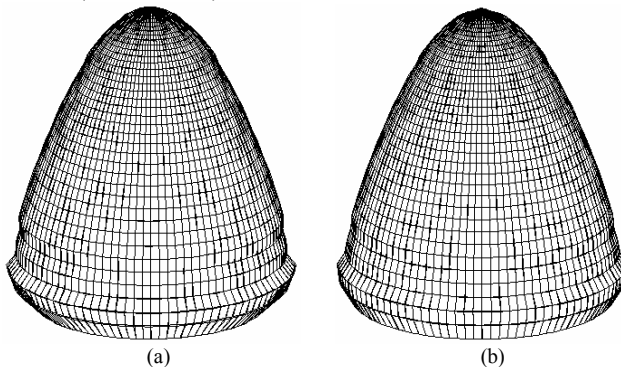



Fig. 9. Shell shapes ( $H = 4, m$ ) after stepwise heating throughout the height:  
(a) uniform heating throughout the thickness, (b) linear heating throughout the thickness

**2.3. Non-uniform heating of the shell.** We examine shells which are non-uniformly heated both throughout the height and the thickness ( $H = 2$  and  $4 m$ ). We accept that the law of stepwise temperature change throughout the height is the same as in the previous study. The temperature distribution over the shell thickness is assumed to be linear by the method [16, 17]. When the upper fiber is heated ( $T_i^{\circ}C$ ), the lower fiber remains cold ( $T = 0^{\circ}C$ ).

Table 5

$\Delta, \%$	 $\omega_i, Hz$				
	$\omega_1$	$\omega_2$	$\omega_3$	$\omega_4$	$\omega_5$
$H = 2 m$	164.98	164.99	166.94	166.98	170.98
$\Delta(T_i^{\circ}/0^{\circ})$	1.48	1.41	1.50	1.30	1.49
$\Delta(T_i^{\circ}/165^{\circ})$	-1.57	-1.83	-1.30	-2.10	-1.06
$H = 4 m$	77.729	78.201	79.735	80.967	84.632
$\Delta(T_i^{\circ}/0^{\circ})$	-0.13	-0.13	-0.19	-0.12	-0.24
$\Delta(T_i^{\circ}/165^{\circ})$	0.62	0.35	0.81	0.01	0.91

As above, the effect of non-uniform heating on frequency values  $\omega_i$  is insignificant (Table 5). Non-uniform heating increases the frequency of the shell for the case  $H = 2 m$  by 1.57% and for the case  $H = 4 m$  less than 1%. This can also be explained by the fact that the non-uniform temperature distribution has little effect on the new shell shape after heating (Fig. 8 (b), Fig. 9 (b)).

Note that non-uniform heating of paraboloids (paragraphs 2.2 and 2.3) has no result (does not affect) on the type of the lowest modes compared with ones for uniform heating (paragraph 2.1). The parabolic shells considered above belong to the class of deep shells and are rather stiffness. Therefore, temperature effect on the vibration characteristics of deep shells is negligible. But researches have shown the effectiveness of applying the developed approach to the study of modal characteristics of shells.

### 3. The effect of the height reduction of the heated parabolic shell on natural vibrations.

Consider an axisymmetric shallow parabolic panel. The height of shell is 10 times less than of those studied above:  $H = 0.2 m$ . The rise of this thin panel is much smaller than the radius of the support boundary. Therefore, this shell can be attributed to the class of shallow ones, since it is generally accepted that for shallow shells  $H < R/5$  [19]. The effect of heating on  $T = 50^{\circ}C$  on the modal characteristics of the shallow parabolic panel is analyzed. Two cases are considered: uniform and non-uniform heating throughout the thickness. Heating throughout the height is taken uniform.

The shell shape after heating (Fig. 10) differs from the corresponding shape of the paraboloid with greater height (Fig. 5). For clarity, the deformed shape is presented on an enlarged scale.

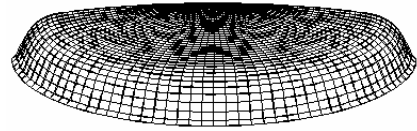


Fig. 10. The shape of a heated parabolic shell ( $H = 0.2\text{ m}$ )

The modal characteristics of the panel before and after heating are presented in Fig. 11 and in Table 6.

№ $\omega_i$	$T = 0^\circ\text{C}$	$\begin{matrix} \square \\ + \\ \square \\ \hline T \end{matrix} T = 50^\circ\text{C}$	$\begin{matrix} \square \\ + \\ \triangle \\ \hline T \end{matrix} T = 50^\circ\text{C}$
1			
2			
3			
4			

Fig. 11. Vibration modes of a shallow parabolic shell ( $H = 0.2\text{ m}$ )

Table 6

Case of heating	$\omega_1, \text{Hz}$	$\omega_2, \text{Hz}$	$\omega_3, \text{Hz}$	$\omega_4, \text{Hz}$	$\omega_5, \text{Hz}$
$T = 0^\circ\text{C}$	83.403	83.976	84.333	85.173	86.360
$\begin{matrix} \square \\ + \\ \square \\ \hline T \end{matrix} T = 50^\circ\text{C}$	81.795	82.146	83.227	84.959	87.069
$\Delta T_0^\circ, \%$	-1.9	-2.2	-1.3	-0.3	0.8
$\begin{matrix} \square \\ + \\ \triangle \\ \hline T \end{matrix} T = 50^\circ\text{C}$	83.118	83.322	83.518	84.036	86.010
$\Delta T_0^\circ, \%$	-0.3	-0.9	-1.0	-1.3	-0.4

The frequency spectrum remains fairly dense. The effect of heating on the frequencies is negligible. The difference in their values does not exceed 2.2% (Table 6).

The types of the vibration modes differ substantially from ones for deeper paraboloids (Fig. 11). In this case, both uniform and non-uniform heating of the shell has a significant effect on the first modes of natural vibrations.

### Conclusions

We have carried out the modal analysis of parabolic shells of revolution exposed to temperature field. The analysis is performed according to the method basing on the relations of the three-dimensional theory of thermoelasticity, a finite-element formulation of the problem in increments and uses the finite element moment scheme. A universal finite element is used to model a thin elastic shell.

The effect of uniform and non-uniform heating on the natural vibrations of parabolic shells of revolution with various heights (deep shells) is investigated. The vibrations of the parabolic shells modelling rocket fairings are studied. The phenomenon of aerodynamic heating of a parabolic shell (head fairing) can occur, for example, at the initial stage of entry of the rocket fairing into the atmosphere. This can cause non-uniform heating along the height of the fairing surface.

Analysis of the calculation results allowed us to make the following conclusions.

Heating of the deep shells has negligible effect on the frequencies of natural vibrations, the spectrum of which is quite dense. The natural vibration frequencies decrease with successive increasing up the height of the paraboloid. At the same time, effect of heating on the first modes of the shell vibrations is observed. Noticeable vibrations occur in the middle part of the shell closer to the clamped edge with forming waves in the circumferential direction. There is no wave formation at the pole of the shell. The effect of heating on the vibration modes decreases with increasing up the height of the shell, and effect from heating completely disappears for shells with  $H = 4$  m.

A decrease in the height of the paraboloid to  $H = 0.2$  m (a shallow panel) leads to a significant decrease in frequencies and a qualitatively different character of the modes of natural vibrations.

We have shown the effectiveness of applying the developed approach to studying the modal characteristics of shells in a temperature field.

### REFERENCES

1. *Bazhenov V., Krivenko O.* Buckling and Natural Vibrations of Thin Elastic Inhomogeneous Shells. – LAP LAMBERT Academic Publishing. Saarbrücken, Deutschland, 2018. – 97 p.
2. *Krivenko O.P.* Vplyv nahrivu na stiykist' i vlasni kolyvannya sferychnoyi paneli pry zmini umov kombinovanoho zakriplennya konturu // *Opir materialiv i teoriya sporud: nauk.-tekh. zbirn.* – K.: KNUBA, 2015. – Vyp. 96 – S. 48-65. [The effect of heating on the stability and natural vibrations of a spherical panel with the changing combined fixation of the boundary // *Strength of Materials and Theory of Structures: Scientific-and-technical collected articles.* – K.: KNUCA, 2015. – Issue 96. – Pp. 48-65. – in Ukrainian].
3. *Krivenko O.P.* Vplyv poperednoho nahrivu ta zminy umov kombinovanoho zakriplennya konturu na stiykist' i vlasni kolyvannya polohykh panelei pry dii tysku // *Opir materialiv i*

- teoriya sporud: nauk.-tekh. zbirn. – K.: KNUBA, 2016. – Vyp. 97. – S. 107-120. [The effect of preliminary heating and combined fixation of the boundary on the stability and natural vibrations of panels under action of pressure // Strength of Materials and Theory of Structures: Scientific-and-technical collected articles – Kyiv: KNUBS, 2016. – Issue 97. – Pp. 97-110. – in Ukrainian].
4. *Flyachok V.M., Shvets R.N.* Vliyaniye neravnomernogo nagreva na sobstvennyye kolebaniya anizotropnykh tsilindricheskikh obolochek // Teplovye napryazheniya v elementakh konstruksiy. 1981. – Vyp. 9. – S. 48-53. [The effect of non-uniform heating on the natural vibrations of anisotropic cylindrical shells // Thermal stresses in structural elements, 1981. - Issue. 9. - S. 48-53. – in Russian].
  5. *Bykov Yu.A., Gnesin V.I.* Vliyaniye temperaturnoy neravnornosti na aerotermouprugiye kolebaniya turbinnoy lopatki // Tekhnologii konstruksionnykh materialov i mashinostroyeniya. 2011. – S. 39-44. [The effect of temperature non-uniformity on aerothermoelastic vibrations of a turbine blade // Technology of construction materials and mechanical engineering, 2011. - P. 39-44. – in Russian]
  6. *Bazhenov V.A., Krivenko O.P., Vorona Yu.V.* Analiz vlasnykh kolyvan tonkykh parabolichnykh obolonok // Opir materialiv i teoriya sporud: nauk.-tekh. zbirn. – K.: KNUBA, 2019. – Vyp. 102. – S. 171-179. [Analysis of non-state reaction of elastic shell to impulse load // Strength of Materials and Theory of Structures: Scientific-and-technical collected articles – Kyiv: KNUBS, 2019. – Issue 102. – Pp. 171-179. – in Ukrainian].
  7. *Chernobryvko M.V., Avramov K.V., Romanenko V.N., Tonkonozhenko A.M., Batutina T.Ya.* Sobstvennyye kolebaniya obtekatel'nykh raket-nositeley // Visnyk SevNTU: zb. nauk. pr. Vyp. 137/2013. Seriya: Mekhanika, enerhetyka, ekolohiia. – Sevastopol, 2013. S. 15 – 18. [natural vibrations of fairings of rocket-carriers // Visnyk SevNTU: Scientific collected articles, Issue 137/2013. Series: Mechanics, Energy, Ecology. - Sevastopol, 2013. Pp. 15 - 18. – in Russian].
  8. [Electronic resource]. – Access mode: <https://habr.com/ru/post/410619/>.
  9. *Krivoshapko S.N.* K voprosu o primenenii parabolicheskikh obolochek vrascheniya v stroitelstve v 2000-2017 godah // Stroitel'naya mehanika inzhenernykh konstruksiy i sooruzheniy, 2017. – № 4. – S. 4-14. [To the question of the use of parabolic shells of revolution in construction in 2000-2017 // Structural Mechanics of Engineering Structures and Structures, 2017. - No. 4. - Pp. 4-14. – in Russian].
  10. *Chernobryvko M.V., Avramov K.V.* Sobstvennyye kolebaniya parabolicheskikh obolochek // Mat. metody ta fiz.-mekh. polia, 2014. – 57, № 3. – S. 78 – 85. [Natural vibrations of parabolic shells // Mathematical Methods and Phys-Mech. fields, 2014. - 57, No. 3. - Pp. 78 - 85. – in Russian].
  11. *Tornabene F., Viola E.* 2-D solution for free vibrations of parabolic shells using generalized differential quadrature method // European Journal of Mechanics - A/Solids. – 2008. – Vol. 27, № 6. – Pp. 1001–1025.
  12. *Chen X., Ye K.* An Exact Dynamic Stiffness Formulation for Predicting Natural Frequencies of Moderately Thick Shells of Revolution // Mathematical Problems in Engineering. – 2018. – Vol. 2018.
  13. *Sahoo S.* Free vibration behavior of laminated composite stiffened elliptic parabolic shell panel with cutout // Curved and Layered Structures. – 2015. – Vol. 2. – №. 1. - 162–182 p.
  14. *Chun K.S., Kassegne S.K., Wondimu B.K.* Hybrid/mixed assumed stress element for anisotropic laminated elliptical and parabolic shells // Finite Elements in Analysis and Design. – 2009. – Vol. 45. – №. 11. – P. 766-781.
  15. *Yue H. et al.* Modal sensing and control of paraboloidal shell structronic system // Mechanical Systems and Signal Processing. – 2018. – Vol. 100. – P. 647-661.
  16. *Bazhenov V.A., Krivenko O.P., Solovey M.O.* Nelineyne deformuvannya ta stiykist pruzhnykh obolonok neodnorodnoyi strukturi. – K.: ZAT «Vipol», 2010. – 316 s. [Nonlinear deformation and stability of elastic shells with inhomogeneous structure. Kyiv: CJSC “VIPOL”, 316 p. (2010) – in Ukrainian].
  17. *Bazhenov V.A., Krivenko O.P., Solovey N.A.* Nelineynoe deformirovanie i ustoychivost uprugih obolochek neodnorodnoyi struktury: Modeli, metody, algoritmy, maloizuchennyye i novyye zadachi. – M.: Knizhnyy dom «LIBROKOM», 2013. – 336 s. [Nonlinear deformation and stability of elastic shells of inhomogeneous structure: Models, methods, algorithms, poorly-studied and new problems. – Moscow: publishing house "LIBROKOM", 336 p. (2013) – in Russian].

18. SCAD Office. V.21. System SCAD++ / V.S.Karpilovskyy, E.Z.Kryksunov, A.A.Maliarenko, A.V.Perelmuter, M.A.Perelmuter, S.Y.Fialko. – SCAD Soft, Electronic Edition, 2018. — 895 p.
19. Zubchaninov V.G. Osnovy teorii uprugosti i plastichnosti: Uchebn. dlya mashinostroit. spec. vuzov. – M.: Vyssh. shk., 1990. – 368 s. [Fundamentals of the theory of elasticity and plasticity: Textbook. for machine building. specialist. universities. – M.: Higher. school, 1990. – 368 p. – in Russian].

Стаття надійшла 28.05.2019

*Баженов В.А., Кривенко О.П., Ворона Ю.В.*

### **ВПЛИВ НАГРІВУ НА ВЛАСНІ КОЛИВАННЯ ТОНКИХ ПАРАБОЛІЧНИХ ОБОЛОНОК**

Проведено модальний аналіз параболічних оболонок обертання, що знаходяться в температурному полі. Аналіз проводиться методом, який ґрунтується на співвідношеннях тривимірної теорії термопружності, скінченно-елементної постановки задачі у приростах та використовує моментну схему скінченних елементів. Для моделювання тонкої пружної оболонки використовується універсальний скінченний елемент. Скінченний елемент побудований на основі просторового ізопараметричного скінченного елемента з полілінійними функціями форми для координат і переміщень. Оцінка впливу температурного поля на параметри власних коливань оболонки проводиться у два етапи. На першому етапі за допомогою геометрично нелінійного методу визначається новий напружено-деформований стан конструкції. Далі обчислюються частоти і форми власних коливань оболонки, форма яких збурена дією температурного поля. Проведено детальне дослідження впливу рівномірного і нерівномірного нагріву на власні коливання параболічних оболонок різної висоти. Вивчено коливання параболічних оболонок, що моделюють обтічник ракети. Дослідження показали ефективність застосування розробленого підходу до модального аналізу оболонок.

**Ключові слова:** вібрації, температурне поле, параболічна оболонка, універсальний просторовий скінченний елемент.

*Bazhenov V.A., Krivenko O.P., Vorona Yu.V.*

### **EFFECT OF HEATING ON THE NATURAL VIBRATIONS OF THIN PARABOLIC SHELLS**

The modal analysis of parabolic shells of revolution exposed to temperature field is carried out. The analysis is performed according to the method, which is based on the relations of the three-dimensional theory of thermoelasticity, a finite-element formulation of the problem in increments and uses the finite element moment scheme. A universal finite element is used to model a thin elastic shell. The finite element is based on an isoparametric solid finite element with polylinear shape functions for coordinate and displacement interpolation. Evaluation of the effect of the temperature field on the parameters of the natural vibrations of the shell is performed according to the developed method in two stages. The new stress-strain state of the structure, caused by the applied temperature field, is determined using a geometrically non-linear approach. Further, the frequencies and modes of the natural vibrations of the shell whose shape is perturbed by the action of the temperature field are calculated. The effect of uniform and non-uniform heating on the natural vibrations of parabolic shells of revolution with various heights is investigated. The vibrations of the parabolic shells modelling rocket fairings are studied. The phenomenon of aerodynamic heating of a parabolic shell (head fairing) may occur at the initial stage of entry of the carrier rocket into the atmosphere. This can lead to significant heating of the fairing surface. At the same time the shell is non-uniformly heated through the height. The considered parabolic shells are essentially deep and rather rigid. Therefore, the effect of heating on the characteristics of natural vibrations is insignificant. It has been found that shallow shells have lower frequencies and significantly different modes of natural vibration. Presented studies have shown the effectiveness of the application of the developed approach to the modal analysis of the shells.

**Keywords:** vibrations, temperature field, parabolic shell, universal solid finite element.

*Баженов В.А., Кривенко О.П., Ворона Ю.В.*

### **ВЛИЯНИЕ НАГРЕВА НА СОБСТВЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ ТОНКИХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК**

Выполнен модальный анализ параболических оболочек вращения, находящихся в температурном поле. Анализ проводится методом, основанном на соотношениях трехмерной теории термоупругости, конечно-элементной постановки задачи в приращениях и использует моментную схему конечных элементов. Для моделирования тонкой упругой оболочки используется универсальный конечный элемент. Конечный элемент построен на основе пространственного изопараметрического конечного элемента с полилинейными функциями формы для координат и перемещений. Оценка влияния температурного поля на параметры собственных колебаний оболочки проводится в два этапа. На первом этапе с помощью геометрически нелинейного метода определяется новое напряженно-деформированное состояние конструкции. Далее вычисляются частоты и формы собственных колебаний оболочки, форма которых возмущена действием температурного поля. Проведено детальное исследование влияния равномерного и неравномерного нагрева на собственные колебания параболических оболочек различной высоты. Изучены колебания параболических оболочек, моделирующих обтекатель ракеты. Исследования показали эффективность применения разработанного подхода к модальному анализу оболочек.

**Ключевые слова:** вибрации, температурное поле, параболическая оболочка, универсальный пространственный конечный элемент.

УДК 539.3

*Баженов В.А., Кривенко О.П., Ворона Ю.В.* **Вплив нагріву на власні коливання тонких параболических оболонок** // Опір матеріалів і теорія споруд: наук.-тех. збірн. – К.: КНУБА, 2019. – Вип. 103. – С. 3-16. – Англ.

*Розглядається вплив нагріву на параметри власних коливань параболических оболонок обертання.*

Табл. 6. Іл. 10. Бібліогр. 20 назв.

UDC 539.3

*Bazhenov V.A., Krivenko O.P., Vorona Yu.V.* **Effect of heating on the natural vibrations of thin parabolic shells** // Strength of Materials and Theory of Structures: Scientific-and-technical collected articles. – K.: KNUCA, 2019. – Issue 103. – P. 3-16.

*The effect of heating on the parameters of natural vibrations of parabolic shells of revolution is considered.*

Table 6. Fig. 10. Ref. 20.

УДК 539.3

*Баженов В.А., Кривенко О.П., Ворона Ю.В.* **Влияние нагрева на собственные колебания тонких параболических оболочек** // Опір матеріалів і теорія споруд: наук.-тех. збірн. – К.: КНУБА, 2019. – Вип. 103. – С. 3-16. – Англ.

*Рассматривается влияние нагрева на параметры собственных колебаний параболических оболочек вращения.*

Табл. 6. Іл. 10. Библиогр. 20 назв.

**Автор (вчена ступень, вчене звання, посада):** доктор технічних наук, професор, академік Національної академії педагогічних наук України, директор НДІ будівельної механіки *БАЖЕНОВ Віктор Андрійович*

**Адреса робоча:** 03680 Україна, м. Київ, Повітрофлотський проспект 31, Київський національний університет будівництва і архітектури.

**Робочий тел.:** +38(044) 245-48-29.

**мобільний тел.:** +38(067)111-22-33

**Імейл:** [bazhenov.va@knuba.edu.ua](mailto:bazhenov.va@knuba.edu.ua)

**ORCID ID:** <https://orcid.org/0000-0002-5802-9848>

**Автор (вчена ступень, вчене звання, посада):** кандидат технічних наук, старший науковий співробітник, провідний науковий співробітник НДІ будівельної механіки *КНУБА КРИВЕНКО Ольга Петрівна*

**Адреса робоча:** 03680 Україна, м. Київ, Повітрофлотський проспект 31, Київський національний університет будівництва і архітектури.

**Робочий тел.:** +38(044) 245-48-29.

**мобільний тел.:** +38(066) 048-32-77

**Імейл:** [kryvenko.op@knuba.edu.ua](mailto:kryvenko.op@knuba.edu.ua)

**ORCID ID:** <https://orcid.org/0000-0002-1623-9679>

**Автор (вчена ступень, вчене звання, посада):** кандидат технічних наук, доцент, професор кафедри будівельної механіки *ВОРОНА Юрій Володимирович*

**Адреса робоча:** 03680 Україна, м. Київ, Повітрофлотський проспект 31, Київський національний університет будівництва і архітектури.

**Робочий тел.:** +38(044) 245-48-29.

**мобільний тел.:** +38(050)750-13-61

**Імейл:** [vorona.iuv@knuba.edu.ua](mailto:vorona.iuv@knuba.edu.ua)

**ORCID ID:** <https://orcid.org/0000-0001-8130-7204>



UDC 539.3

## EVALUATION ON STRESS DISTRIBUTION, DEFORMATION RATE IN EMBANKMENT AND SOFT SOIL REINFORCED CONCRETE PILE COMBINED GEOTEXTILE BELOW THE EMBANKMENTS IN GEOLOGICAL CONDITIONS MEKONG DELTA

Nguyen Anh Tuan<sup>1</sup>,  
PhD

Nguyen Tuan Phuong<sup>2</sup>,  
PhD

<sup>1</sup>*Hochiminh City University of Transport,  
No. 2, D3 St., Ward 25, Binh Thanh Dist., Hochiminh City, Vietnam*

<sup>2</sup>*Hochiminh City University of Technology,  
No. 268, Ly Thuong Kiet St., Dist. 10, Hochiminh City, Vietnam*

DOI: 10.32347/2410-2547.2019.103.17-32

The main content of the paper is evaluation stress distribution, deformation rate in embankment and soft soil reinforced concrete pile combined geotextile below the embankments in geological conditions in Mekong delta by finite element method to Geotechnique-designer have to notice the correlation of rational pile-distance and embankment-depth when design weak foundation.

**Keywords:** Geosynthetic reinforced pile, soft soil, pile embankment, foundation, FEM.

### 1. Introduction

With the rapid growth of the economy and the trend of industrialization and modernization of the country, the demand of developing buildings, factories and other infrastructures in Vietnam increases, especially in the Mekong Delta area. Because of the geological structure property of Mekong Delta is mainly soft soil, the foundation depth can vary from 30 to 40m. To meet the demand of infrastructure development, there some studies and researches done recently on this geological structure.

The divergent subsidence due to causeway, path way to the bridge, storage has caused difficulty for the transportation and facility in some areas in Hochiminh city. For instance, according to Hochiminh city Transportation Department, the subsidence on Nguyen Huu Canh street varies from 0.5 to 1m. There are some proposal solutions to solve this issue such as concrete piles, sand piles, reinforced concrete, soil&cement mixture to reduce load, etc... These solutions takes a lot of time and are not efficient. Recent years, there is a solution for the foundation called "The embankment on the pile combined with geotextile". Hopefully this solution will solve the issue.

The evaluation and analysis on stress distribution, ground deformation and reinforced concrete and geotextile treatment on soft soil is extremely essential to find the new solution to improve the quality of foundation in Mekong Delta area.

### 2. Theoretical basis

#### 2.1. Theory of soil arching

According Terzaghi (1943) arching effects have been described. Arching effects base on his experiment on the trap-door effects as shown in Fig. 1.

Stress Distribution Equation:

$$(\sigma_z + d\sigma_z)^* S - \sigma_z^* S + 2\tau_{xz} dz - dG = 0. \tag{1}$$

With  $\sigma_z$  is vertical effective Stress (Z direction),  $\tau_{xz}$  is shear stress on xz plane,  $S$  is width of trap-door,  $G$  is weight of soil on trap-door,  $\gamma$  is the soil unit weight.

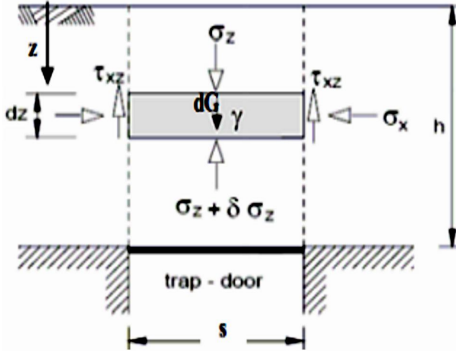


Fig. 1. Description of soil Arching analysis with Terzaghi's method

The equivalent equation:

$$d\sigma_z^* S = \gamma^* S dz - 2\tau_{xz} dz. \tag{2}$$

According to Mohr-Coulomb, the Shear Stress at failure can be expressed as:

$$\tau_{xz} = C' + \sigma_x \tan \phi'. \tag{3}$$

With  $C'$  and  $\phi'$  are the effective cohesion and friction angle of the soil. The effective horizontal stress as a function of vertical effective stress is

$$\sigma_x = \sigma_z^* K, \text{ Terzaghi determined}$$

that  $K=1$  based on his experimental results.

The equation is written as:

$$d\sigma_z^* S = \gamma^* S dz - 2(C' + \sigma_z K \tan \phi') dz. \tag{4}$$

Dividing both side of Equation (4) with  $\sigma_z$  and  $s$ :

$$\left( \frac{d\sigma_z}{\sigma_z} \right) = \frac{\gamma}{\sigma_z} dz - \frac{2C'}{s^* \sigma_z} dz - \frac{2K^* \tan \phi}{s} dz. \tag{5}$$

The solution for the differential equation is as follows

$$\sigma_z = \frac{S^* (\gamma - 2C'/S)}{2^* K^* \tan \phi'} \left\{ 1 - e^{-2K \tan \phi' \frac{z}{s}} \right\} + p^* e^{-2K \tan \phi' \frac{z}{s}}. \tag{6}$$

According to the result found by Terzaghi,  $K=1$ . Solve equation (6) gives an exponentially increasing vertical effective stress within the embankment fill between the two rigid foundations. Comparison between effective vertical stress distribution with the linearly increasing geostatic vertical stress is shown in Fig 2. Due to arching, the vertical stress acting on the ground surface below the embankment is much lower than the geostatic vertical stress.

Arching is defined by Mc. Nulty (1965) as “The ability of a material to transfer from one location to another in response to a relative displacement between the location. A system of shear stresses is the mechanism by which the loads are transfer”.

The Nordic Guiline method helps analyze arching in soil is suggested by Carlsson (1987), this method shows the angle of arching is 30 degrees refer to Fig. 5.

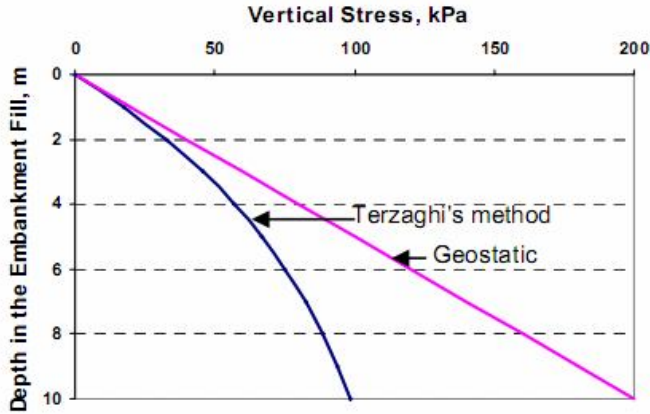


Fig. 2. Typical vertical stress distribution of embankment fill between trap-door of Terzaghi

Weight of the soil is calculated in 2D as below:

$$W = \frac{(b-a)^2}{4 \tan 15^\circ} \gamma, \tag{7}$$

with  $a$  is the width of the pile,  $b$  is the distance between the centre of 2 piles,  $\gamma$  is unit weight of the embankment.

Svant et al. (2000) suggested the soil weight formula in 3D

$$W = \frac{\gamma}{2a} \left\{ b^2 H - \frac{1}{6 \tan \beta} \left[ (a + H \tan \beta)^3 - a^3 \right] \right\}. \tag{8}$$

With  $a$  is the width of the pile,  $b$  is the distance between the centre of 2 piles,  $\gamma$  is the soil unit weight,  $H$  is the height of soil layer.

Development by Jones et al. (1990) based on the past study by Marston and Anderson (1913) about the peak of the spherical dome between piles.

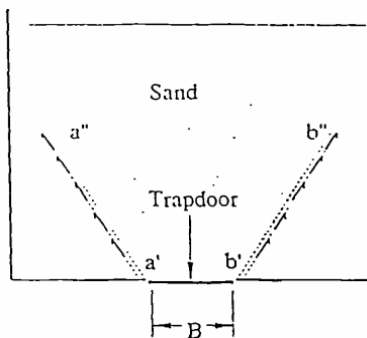


Fig. 3. The shear stress path when trap-door min displacement of Terzaghi

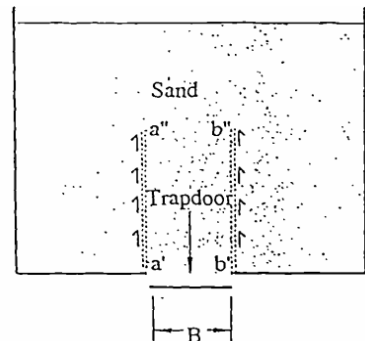


Fig. 4. The shear stress path when trap - door max displacement of Terzaghi

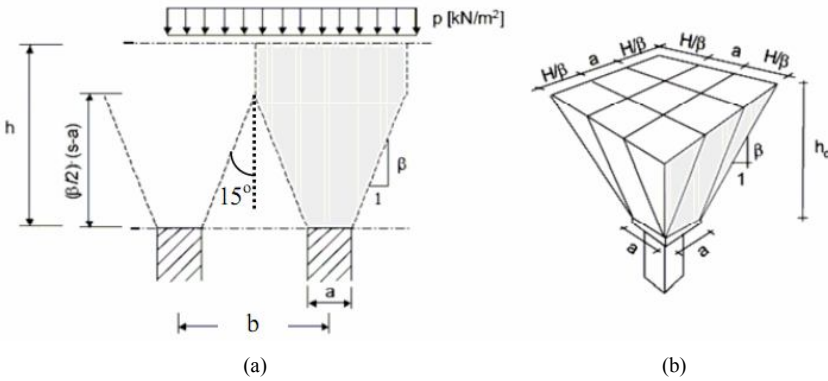


Fig. 5. Soil wedge model (a) 2D; (b) 3D defined by Carlsson

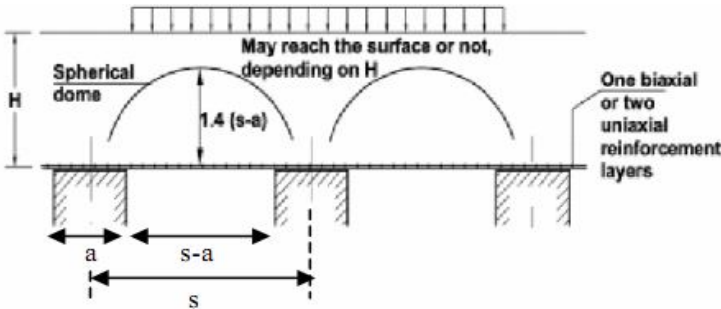


Fig. 6. Hemispheric in BS 8006

Analyze the spherical dome based on the ratio between pressure on the pile and vertical stress on the soft soil layer,  $P'_c / \sigma_v$

$$P'_c = \delta'_v \left[ \frac{C_c a}{H} \right]^2 \tag{9}$$

With:  $C_c$  is soil arching coefficient ( $C_c = 1.95(H/a) - 0.18$  for end-bearing pile,  $C_c = 1.5(H/a) - 0.07$  for friction and other pile),  $a$  is the size of the pile caps,  $H$  is the height of the embankment.

**2.2. Load Transfer**

McNulty (1965) and Kempton (1998) The ratio of the vertical stress on top of the cap:

$$\rho = \frac{P_b}{\gamma H + q_0} \tag{10}$$

Where:  $p_p$  is average vertical pressure above geosynthetic,  $q_0$  is uniform surcharge on the embankment,  $T$  is tension on geotextile,  $\rho = 0$ : Represents the Complete soil arching /  $\rho = 1$ : Represents no soil arching,  $\gamma$  is the soil unit weight.

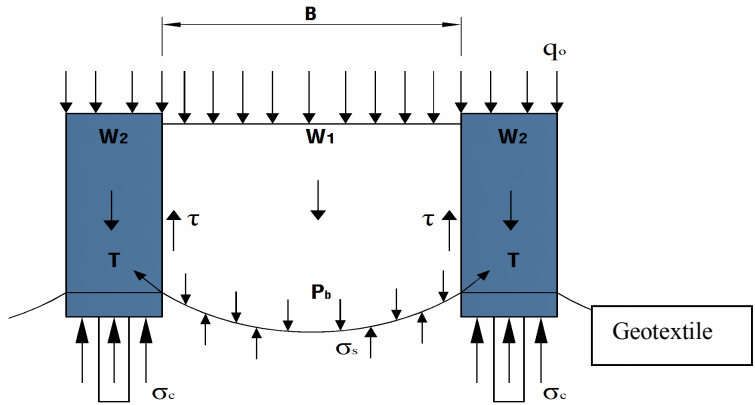


Fig. 7. Load transfer (cited in Li, 2002)

Han (2003) The ratio of the vertical stress on top of the cap:

$$n = \frac{\sigma_c}{\sigma_s} \tag{11}$$

With  $\sigma_c$  is vertical stress on pile,  $\sigma_s$  is vertical stress between piles.

Schmidt (2004) The ratio of the vertical stress on top of the cap:

$$LKF = \frac{Q}{Q_s} = \frac{\sigma_c^* A_c}{\gamma^* H^* A_c} \tag{12}$$

$\Gamma$  is the soil unit weight,  $H$  is height of embankment,  $A_c$  is Cross sectional area of pile.

**2.3. Factor that determines arching**

Ratio that determines arching

CSR is the column stress ratio

SRR is the stress reduction ratio

$N$  is the ratio of the vertical stress on top of the cap and  $E$  The piled embankment efficacy.

$$CSR = \frac{\sigma_c}{\sigma} = \frac{\sigma_c}{(\gamma H + q)}, \tag{13}$$

$$SRR = \frac{\sigma_s}{\sigma} = \frac{\sigma_s}{(\gamma H + q)}, \tag{14}$$

$$n = \frac{\sigma_c}{\sigma_s}, \tag{15}$$

$$E = \frac{\sigma_c \times a_s}{\sigma}. \tag{16}$$

With:  $\gamma$  is the soil unit weight,  $H$  is height of soil layer,  $q$  is surcharge load,

$$a_s = \frac{A_c}{A_c + A_s},$$

$A_c$  is pile cross sectional area,  $A_s$  is area of the soil associated with the column.

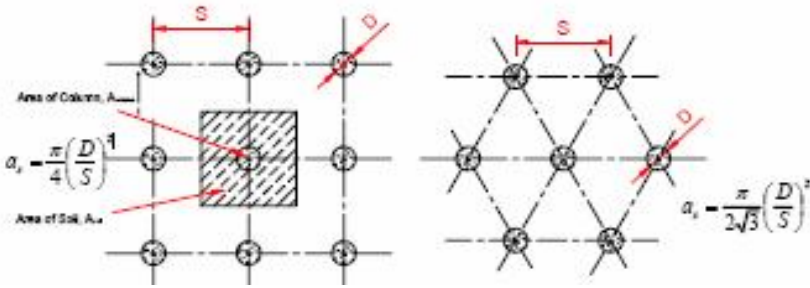


Fig. 8. Area replacement ratio

According to BS8006:1995 and some researchers, SRR is calculated as Table 1.

Table 1

The stress reduction ratio

No.	The stress reduction ratio		No. Equa
1	BS 8006 1995	$SRR = \frac{2 * S * (\gamma H + q)(S - a)}{(S^2 - a^2)^2 * \gamma H} * \left[ S^2 - a^2 \left( \frac{P'_c}{\gamma H} \right) \right]$ With $H \leq 1.4(S - a)$ $SRR = \frac{2.8 * S}{(S + a)^2 * H} * \left[ S^2 - a^2 \left( \frac{P'_c}{\gamma H} \right) \right]$ With $H > 1.4(S - a)$ With $\frac{P'_c}{\gamma H} = \left( \frac{C_c a}{H} \right)^2$	(17) (18) (19)
2	Terzaghi	$SRR = \frac{(S^2 - a^2)}{4 * H * a * K * \tan \phi} \left\{ 1 - e^{-\frac{4HaK \tan \phi}{s^2 - a^2}} \right\}$	(20)
3	Randolph 1988	$SRR = \frac{1}{\left[ \frac{2K_p}{K_p + 1} \right] \left[ \left( 1 - \frac{a}{s} \right)^{(1 - K_p)} - \left( 1 - \frac{a}{s} \right) \left( 1 + \frac{a}{s} K_p \right) \right] + \left( 1 - \frac{a^2}{s^2} \right)}$	(21)
4	Guido	$SRR = \frac{(s - a)}{3\sqrt{2} * H}$	(22)
5	Low 1994	$SRR = \frac{(K_p - 1)(1 - \delta)S}{2H * (K_p - 2)} + (1 - \delta)^{(K_p - 1)} \left[ 1 - \frac{S}{2H} - \frac{S}{2H(K_p - 2)} \right]$	(23)
6	Carlsson	$SRR = \frac{s - a}{4.H. \tan 15^\circ}$	(24)
7	Kivilo 1998	$CSR = \frac{1}{a_s + \frac{E_{soil}}{E_{col}}(1 - a_s)}$ $SRR = \frac{E_{soil}}{E_{col} a_s + E_{soil}(1 - a_s)}$	(25) (26)

In which:  $H$  is height of the embankment,  $q$  is external load,  $s$  is distance between pile center,  $a$  is Area replacement ratio,  $C_c$  is arching coefficient ( $C_c = 1.95(H/a) - 0.18$  for end-bearing pile,  $C_c = 1.5(H/a) - 0.07$  for friction and other pile),  $\beta'$  is angle of friction of the embankment fill,  $K$  is coefficient of later earth pressure ( $K = 1$ )

$$K = \frac{1 + \sin \varphi}{1 - \sin \varphi}$$

is Rankine coefficient of passive earth pressure,  $E_{col}$  is Modulus of elasticity of the column,  $E_{soil}$  is Modulus of elasticity of the unstabilized soil surrounding the column.

### 3. The embankment on the pile combined with geotextile

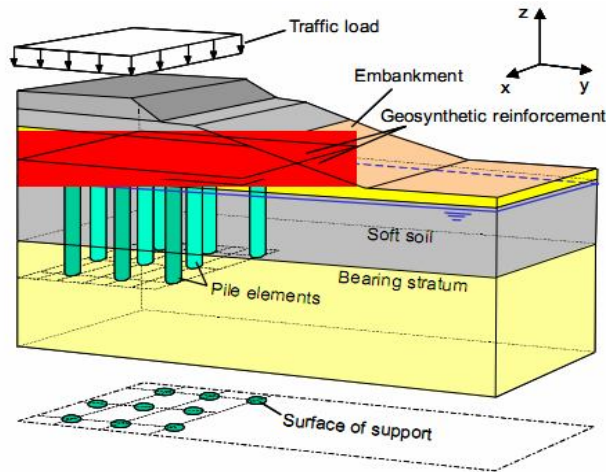


Fig. 9. Geosynthetic reinforced pile supported embankment [4],[5]

### Arching in embankment.

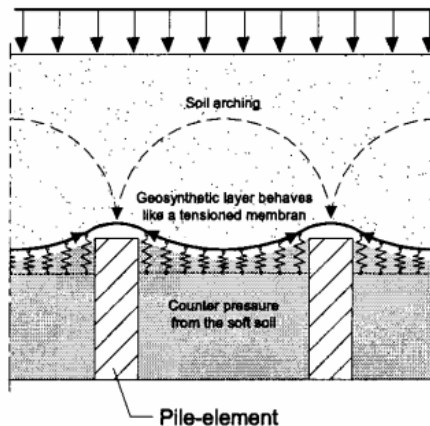


Fig. 10. Arching in embankment [4], [5]

### 3.1. Geosynthetic reinforcement

#### 3.1.1. BS 8006 (1995)

One of the formulas to calculate the tension force in the geosynthetic based on the BS 8006 is as follows.

$$T_{rp} = \frac{W_T(s-a)}{2a} \sqrt{1 + \frac{1}{6\varepsilon}}, \quad (27)$$

where  $T_{rp}$  is the tensile force per meter geosynthetics,  $W_T$  is distributed vertical load acting on the geosynthetic between the piles,  $\varepsilon$  is the strain in the geosynthetics (%),  $a$  is the pile cap size and  $s$  is the center-to-center spacing.

#### 3.1.2. Zaeske (2001) and Kempfer (2002)

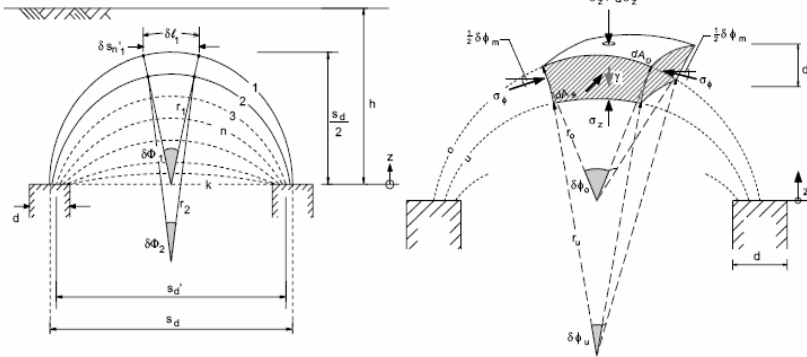


Fig 11. Multi arching model [2]

The equation is developed:

$$-\sigma_z dA_u + (\sigma_z + d\sigma_z) dA_0 - 4\sigma_\phi dA_s \sin\left(\frac{\delta\phi_m}{2}\right) + \gamma dV = 0. \quad (28)$$

Where:

$$dA_u = (r\delta\phi)^2, \quad (29)$$

$$dA_0 = (r+dr)^2 \cdot (\delta\phi + d\delta\phi)^2 = 2d\delta\phi \cdot r^2 \cdot \delta\phi + 2dr \cdot r \cdot \delta\phi^2 + r^2 \cdot \delta\phi^2, \quad (30)$$

$$dA_s = (r + \frac{1}{2}dr) \cdot (\delta\phi + \frac{1}{2}d\delta\phi) \cdot dz = dz \cdot r \cdot \delta\phi, \quad (31)$$

$$dV = (r + \frac{1}{2}dr)^2 \cdot (\delta\phi + \frac{1}{2}d\delta\phi)^2 \cdot dz = dz \cdot r^2 \cdot d\delta\phi^2. \quad (32)$$

The equation is developed the tension force in the geosynthetic:

$$\frac{d^2z}{dx^2} = \frac{q_2}{H} + \frac{C-x}{H}, \quad (33)$$

$$H = \frac{2 \cdot \int_0^i \sqrt{1+(z_w^1)^2} \cdot dx + 2 \cdot \int_i^j \sqrt{1+(z_p^1)^2} \cdot dx - l_0}{2 \cdot \int_0^i (1+(z_w^1)^2) \cdot dx + 2 \cdot \int_i^j (1+(z_p^1)^2) \cdot dx}. \quad (34)$$



Where

$$z_W(x) = A_{1,W} \cdot e^{\alpha_W \cdot x} + A_{2,W} \cdot e^{-\alpha_W \cdot x} - \frac{\beta_W}{\alpha_W^2}, \quad 0 \leq x \leq i, \tag{35}$$

$$z'_W(x) = \alpha_W \cdot (A_{1,W} \cdot e^{\alpha_W \cdot x} - A_{2,W} \cdot e^{-\alpha_W \cdot x}).$$

The tensile force per meter geosynthetic:

$$S(x) = \varepsilon(x) / J = H \cdot \sqrt{1 + z'^2(x)}. \tag{36}$$

### 3.2. Result of model

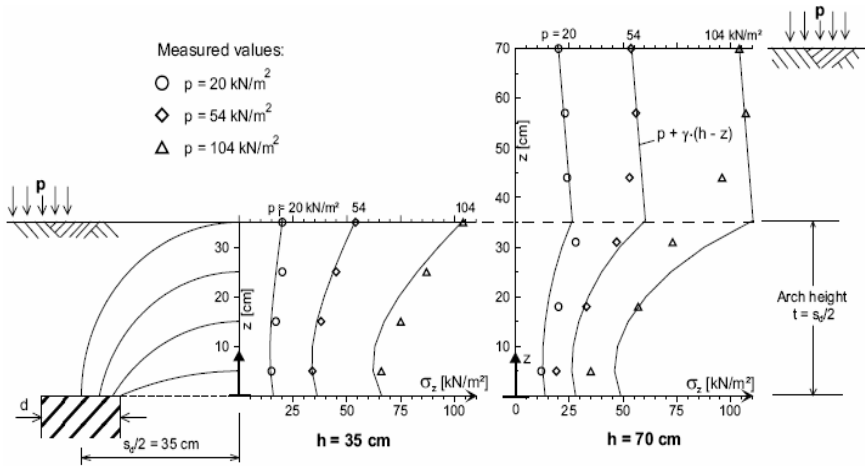


Fig. 12. The result of model Zaeske (2001) [2]

According to the experiment by Zaeske (2001), it is proven that the ratio of the arching in soil with the real dimension is 1/3. This includes 4 piles in soft soil. On the top of each pile is covered by geotextile with the earth pressure cells.

The experiment result is recorded as below:

Case 1: distance between 2 piles  $s = 70\text{cm}$ , sand layer's thickness of 35cm, applied loads of 20kN/m<sup>2</sup>, 5420kN/m<sup>2</sup>, 10420kN/m<sup>2</sup>. Vertical stress is measured at distance of 5cm, 15cm, 25cm between and above the top of 2 piles.

Table 2

Case 1

$p$ (kPa)	$\sigma$ (kN/m <sup>2</sup> )	$h$ (cm)
20	15-16-19	5-15-25
54	33-42-45	5-15-25
104	65-75-87	5-15-25

Case 2: distance between 2 piles  $s = 70\text{cm}$ . sand layer's thickness of 70cm, applied loads of 20 kPa, 54 kPa, 104 kPa. Vertical stress is measured at distance of 5cm, 20cm, 30cm, 45cm, 55cm between and above the top of 2 piles.

Table 3

Case 2

$p$ (kPa)	$\sigma$ (kN/m <sup>2</sup> )	$h$ (cm)
20	15-20-29-25-22	5-20-30-45-55
54	20-33-46-54-57	5-20-30-45-55
104	35-57-73-95-107	5-20-30-45-55

4. Design of ingenieurgesellschaft geotecgnik walz (igw) used for Hung Loi metro in Can Tho City

The model uses cylindrical piles with diameter  $D = 300\text{mm}$ , spacing between piles  $S=4000\text{mm}$ , reinforced concrete dimension of  $1500 \times 1500 \times 300\text{mm}$ , above is geotextile with the height of  $500\text{mm}$  for big sand particles. Concrete layer  $10 \times 20 \text{ B.15}$  thickness of  $250\text{mm}$ , rock layer  $0 \times 40\text{mm}$  thickness of  $350\text{mm}$ .

The model is illustrated in Fig.13.

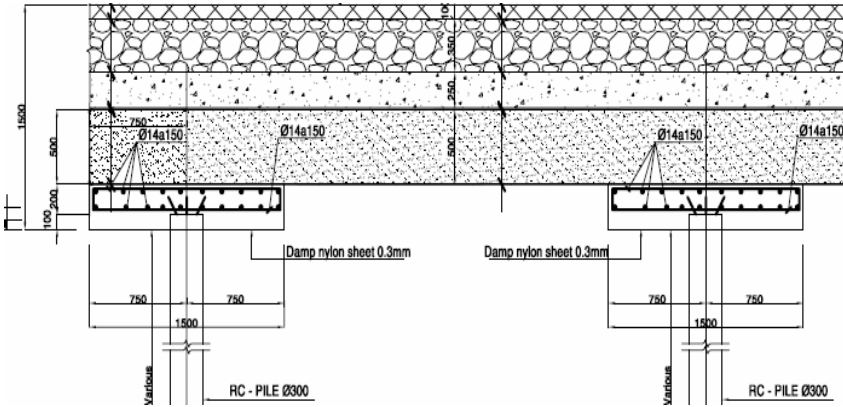


Fig. 13. Design of (IGW) used for Hung Loi Metro in Can Tho City

Deformation of the structure after completion of project in Fig. 14.

LGA Bautechnik GmbH  
Member of LGA – a group of companies

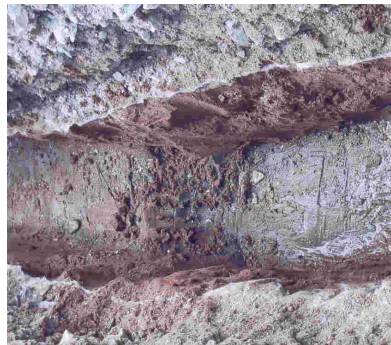


Fig. 14. Differential settlement of Hung Loi Metro project

### 5. The development of the new model

Redesign the model using reinforced concrete piles with B.20, cross section area of 300x300mm, spacing between piles varies from 1.0m, 1.5m, 2.0m, 2.5m, using Mac 40 geotextile to put on the top of each pile. Sand layer is 1m high, reinforced concrete thickness of 150mm. Using Plaxis 3D Tunnel and Mohr-Coulomb to model with the following parameters.

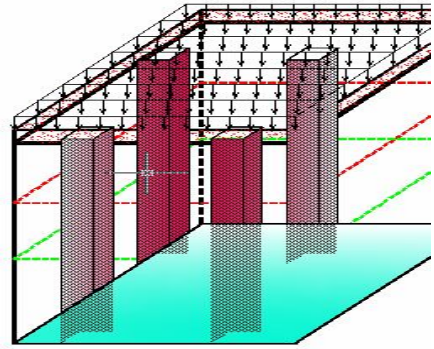


Fig. 15. The development of the new model to repair Hung Loi Metro in Can Tho city

Table 4

#### Properties of soil layers

Properties	Index	Layer 1	Layer 2	Layer 3	Sand layer	Unit
		Soft soil	stiff clay	sand	Sand embankment	
Horizontal coefficient ratio	$k_x$	$0.214 \cdot 10^{-6}$	$1.2 \cdot 10^{-4}$	$2 \cdot 10^{-2}$	$3 \cdot 10^{-2}$	cm/s
Vertical coefficient ratio	$k_y$	$0.12 \cdot 10^{-6}$	$0.6 \cdot 10^{-4}$	$1 \cdot 10^{-2}$	$1 \cdot 10^{-2}$	cm/s
Modulus of elasticity of the unstabilized soil surrounding	$E_{oed}$	1252	14900	28860	30000	kN/m <sup>2</sup>
Poisson ratio	$\nu$	0.35	0.33	0.3	0.3	-
Cohesion	$C'$	8	71	1	1	kN/m <sup>2</sup>
Angle of friction of soil	$\varphi'$	$18^{\circ}16'$	$26^{\circ}58'$	$30^{\circ}$	$30^{\circ}$	degree

Table 5

#### Properties of reinforced concrete pile

Properties	Index		Unit
Modulus of elasticity reinforced concrete	$E$	$2.9 \cdot 10^7$	kN/m <sup>2</sup>
Area of section	$A$	$0.3 \cdot 0.3$	m <sup>2</sup>
Poisson ratio	$\nu$	0.15	-
Base thickness	$h$	0.15	m

**5.1. The analysis of model used Plaxis 3d Tunnel software**

**5.1.1. Pile subsidence**

To create the spherical dome, there should not be any subsidence on the pipes, the limit subsidence is  $S \leq 10\text{mm}$

**5.1.2. The effect of geotextile**

Geotextile with high expansion, there should not be any damage on geotextile under load.

**5.1.3. Sand layer**

Sand particles are big with  $c' = 1\text{kN/m}^2$ ,  $\phi' = 30$  degrees, the height of sand layer should be corresponding to the distance between piles.

**5.1.4. Reinforced concrete layer**

There needs to be reinforced concrete layer for the load distribution to avoid stress concentration on critical points.

**5.2. The analysis result of the model**

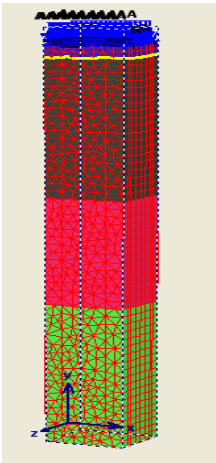


Fig. 16. Model in Plaxis

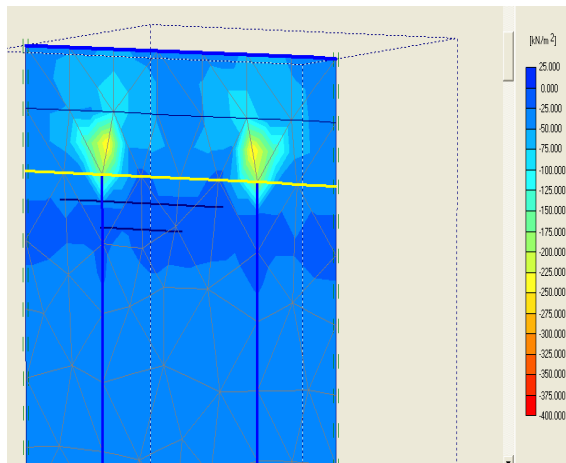


Fig. 17. The vertical stress on top of the top pile

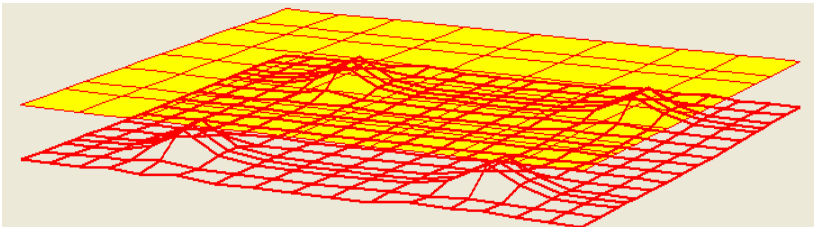


Fig. 18. The tensile force per meter geosynthetic

**5.2.1. Stress Distribution**

Below are the graphs of the relationship between stress distribution and the pile spacing.

With the pile spacing  $S = 1\text{m}$  and  $S = 1.5\text{m}$ , the vertical stress value at the top of the pile is maximum, in the higher up than the top of the pile, the vertical stress tends to decrease and distributed equally near the armoured concrete slab.

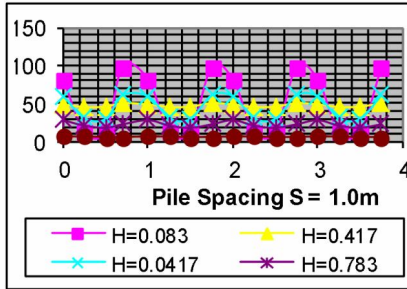


Fig. 19. The vertical stress on top of the top pile with  $S = 1.0\text{m}$

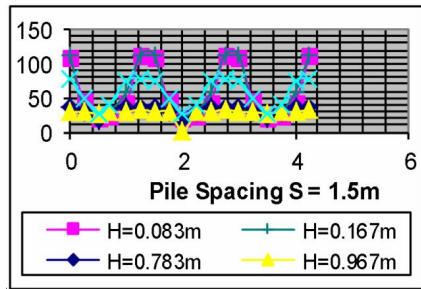


Fig. 20. The vertical stress on top of the top pile with  $S = 1.5\text{m}$

When the pile spacing is farther  $S = 2,0\text{m}$  and  $S = 2,5\text{m}$ , the maximum vertical stress value at the top of the pile is 1.5 times higher than the pile spacing  $S = 2.0\text{m}$  and  $S = 2.5\text{m}$ , in the higher up than the pile head, the vertical stress tends to decrease but not distributed equally near the armoured concrete slab.

**5.2.2. The vertical stress on top of the top pile ratio**

The vertical stress on top of the top pile ratio  $n = \sigma_c / \sigma_s$ ,

- Spacing between piles and high embankment  $S=1\text{m}$ ,  $H = 1\text{m}$

When  $S = 1\text{m}$ ,  $H = 1\text{m}$ . The stress concentration factor at the top of the pile is  $n = 6.8$ , in the higher up than the pile head, the vertical stress tends to decrease and distributed equally near the armoured concrete slab. The stress concentration factor  $n=1.12$ .

- Spacing between piles and spacing between pile  $S=1.5\text{m}$ ,  $H=1\text{m}$ .

When  $S = 1.5\text{m}$ ,  $H = 1\text{m}$ . The stress concentration factor at the top of the pile is decreased  $n = 4.93$ , in the higher up than the pile head, the

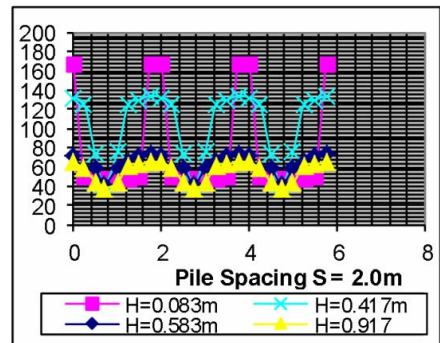


Fig. 21. The vertical stress on top of the top pile with  $S = 2.0\text{m}$

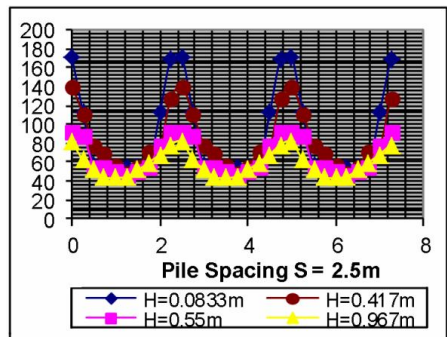


Fig. 22. The vertical stress on top of the top pile with  $S = 2.5\text{m}$

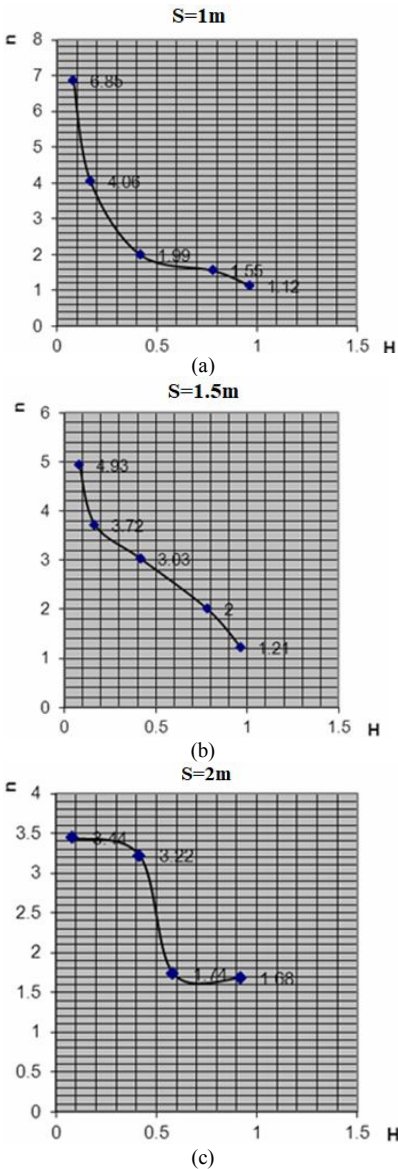


Fig. 23. Relation between the vertical stress on top of the top pile ratio and height embankment with spacing between piles is 1m (a), 1.5m (b), 2.0m (c)

vertical stress tends to decrease and distributed equally near the armoured concrete slab. The stress concentration factor  $n=1.12$ .

- Spacing between piles and spacing between pile  $S=2m, H=1m$ .

When  $S = 2m, H = 1m$ . The stress concentration factor at the top of the pile is decreased  $n = 3.44$ , in the higher up than the pile head, the vertical stress tends to decrease and not distributed equally near the armoured concrete slab. The stress concentration factor  $n=1.68$ .

**6. Conclusion and recommendation**

**6.1. Conclusion**

- The coefficient of stress concentration  $n$  or the inverse  $n^*$  will depend on the distance between piles. The further the distance is, the more  $n$  decreases and the more  $n^*$  increases.

- The height  $h_{dap} \geq S$  will make the spherical dome become clearer. When  $h_{dap} \geq S/2$  then  $hg=S/2$ . When  $h_{dap} < S/2$  then arching height  $hg= h_{dap}$ .

- When the height  $cao$   $h_{dap} < S/2$  the deformation is not uniform, and the other way around. When choosing the sand layer, we should choose  $h_{dap} > S/2$  and depend on the distance between the piles.

**6.2. Recommendation**

- Structure of the project is not reasonable. We should choose Structure of the project bearing capacity distribution.

- When applying the new model, notice that the distance between piles and the height should be carefully considered to improve and increase the efficiency of the arching..

## REFERENCES

1. *B. Le Hello, B. Chevalier, G. Combe, P. Villard*, Coupling finite elements and discrete elements methods, application to reinforced embankment by piles and geosynthetics.
2. *Chau Ngoc An*, Foundation, Publishers National University Ho Chi Minh City, (2012).
3. *Nguyen Minh Tam*, The behavior of DMC column under highway embankments by finite element analysis, (2006).
4. *H.-G. Kempfert*, Lateral spreading in basal reinforced embankments supported by pile-like elements, University Kassel, Germany March 2008.
5. *Hans-Georg Kempfert Berhane Gebreselassie*, Excavations and Foundations in Soft Soils, University Kassel, Germany.
6. *H.-G. Kempfert & M. Raitzel & A. Kirchner*, Pile-supported embankments on soft ground for a high speed railway - Load Transfer, Distribution and Concentration by different construction methods
7. *Kempfert, H. - G, Stadel, M. and Zaeske, D.* Design of geosynthetic-reinforced bearing layers over piles. Bautechnik, Vol. 74, No. 12, December 1997
8. *BS 8006 (1995)*: British Standard, code of practice of strengthened/ reinforced soils and other fills, chapter 9
9. *Pham Quang Long*, Existing problems of Vietnamese design standards for highway embankment on soft ground
10. *Nguyen Minh Tam*, The behavior of DCM (Deep cement mixing) columns under highway embankments by finite element analysis, august 2006
11. *Terzaghi, K. (1943)*, Theoretical Soil Mechanics, Jonh Wily anh Sons, New York
12. *Hans-Georg Kempfert Berhane Gebreselassie*, Excavations and Foundations in Soft Soils, University Kassel, Germany
13. *H.-G. Kempfert & M. Raitzel & A. Kirchner*, Pile-supported embankments on soft ground for a high speed railway - Load Transfer, Distribution and Concentration by different construction methods
14. *Hewlett, W. J., and Randolph, M.F.* Analysis of piled embankments. Ground Engineering, Vol. 22, No. 3, April 1988.

*Стаття надійшла 03.07.2019*

*Nguyen Anh Tuan, Nguyen Tuan Phuong*

**EVALUATION ON STRESS DISTRIBUTION, DEFORMATION RATE IN EMBANKMENT AND SOFT SOIL REINFORCED CONCRETE PILE COMBINED GEOTEXTILE BELOW THE EMBANKMENTS IN GEOLOGICAL CONDITIONS MEKONG DELTA**

With the rapid growth of the economy and the trend of industrialization and modernization of the country, the demand of developing buildings, factories and other infrastructures in Vietnam increases, especially in the Mekong Delta area. Because of the geological structure property of Mekong Delta is mainly soft soil, the foundation depth can vary from 30 to 40m. To meet the demand of infrastructure development, there some studies and researches done recently on this geological structure.

The evaluation and analysis on stress distribution, ground deformation and reinforced concrete and geotextile treatment on soft soil is extremely essential to find the new solution to improve the quality of foundation in Mekong Delta area. The main content of the paper is evaluation stress distribution, deformation rate in embankment and soft soil reinforced concrete pile combined geotextile below the embankments in geological conditions in Mekong delta by finite element method to Geotechnique-designer have to notice the correlation of rational pile-distance and embankment-depth when design weak foundation.

**Keywords:** Geosynthetic reinforced pile, soft soil, pile embankment, foundation, FEM.

*Nguyen Anh Tuan, Nguyen Tuan Phuong*

**ОЦЕНКА РАСПРЕДЕЛЕНИЯ НАПРЯЖЕНИЙ, СКОРОСТИ ДЕФОРМАЦИИ НА НАСЫПИ И ГЕОТЕКСТИЛЕ КОМБИНИРОВАННОГО БЕТОНА ИЗ МЯГКОГО ГРУНТА В ГЕОЛОГИЧЕСКИХ УСЛОВИЯХ ДЕЛЬТЫ РЕКИ МЕКОНГ**

С быстрым ростом экономики и тенденцией к индустриализации и модернизации страны, спрос на строительство зданий, фабрик и других видов инфраструктур во Вьетнаме увеличивается, особенно в области дельты Меконга. Из-за особенностей геологической структуры в дельте реки Меконга преобладают мягкие грунты. Глубина заложения фундаментов сооружений может варьироваться от 30 до 40 метров. Чтобы удовлетворить потребность в развитии инфраструктуры, недавно были проведены некоторые исследования этой геологической структуры.

Были выполнены оценка и анализ распределения напряжений, деформации грунта, железобетонных конструкций и геоткани в мягком грунте. Такая оценка чрезвычайно важна для поиска новых подходов, направленных на улучшение характеристик фундаментов сооружений в районе дельты реки Меконг. Основным методом исследования является метод конечных элементов.

**Ключевые слова:** армированный геосинтетический материал, мягкий грунт, насыпной грунт, фундамент, метод конечных элементов.

УДК 539.3

*Nguyen Anh Tuan, Nguyen Tuan Phuong. Оцінка розподілу напружень, швидкості деформації насипу при спорудженні комбінованих з геотканиною пальових фундаментів в геологічних умовах слабких ґрунтів дельти річки Меконг // Опір матеріалів і теорія споруд: наук.-тех. збірн. – К.: КНУБА, 2019. – Вип. 103. – С. 17-32. Іл. 23. Бібліогр. 14 назв.*

UDC 539.3

*Nguyen Anh Tuan, Nguyen Tuan Phuong. Evaluation on stress distribution, deformation rate in embankment and soft soil reinforced concrete pile combined geotextile below the embankments in geological conditions Mekong delta// Strength of Materials and Theory of Structures: Scientific-and-technical collected articles. – K.: KNUBA, 2019. – Issue 103. – P. 17-32. Fig. 23. Ref. 14.*

**Автор (вчена ступень, вчене звання, посада):** *PhD, Lecturer, Faculty of Transportation Engineering, Hochiminh City University of Transport, Nguyen Anh Tuan*

**Адреса:** *No. 2, D3 St., Ward 25, Binh Thanh Dist., Hochiminh City, Vietnam.*

**Тел.:** *(+84) 917.863.898.*

**Імейл:** [tuankct@hcmutrans.edu.vn](mailto:tuankct@hcmutrans.edu.vn)

**Автор (вчена ступень, вчене звання, посада):** *PhD, Lecturer, Faculty of Civil Engineering, Hochiminh City University of Technology, Nguyen Tuan Phuong*

**Адреса:** *No. 268, Ly Thuong Kiet St., Dist. 10, Hochiminh City, Vietnam.*

**Тел.:** *(+84) 919.070.096.*

**Імейл:** [tuanphuongvk@gmail.com](mailto:tuanphuongvk@gmail.com)



УДК 539.3

**ЧЕТВЕРТА МІЖНАРОДНА КОНФЕРЕНЦІЯ “RECENT ADVANCES  
IN NONLINEAR MECHANICS” RANM2019  
 (“ОСТАННІ ДОСЯГНЕННЯ В НЕЛІНІЙНІЙ МЕХАНІЦІ”)**

**В.А. Баженов,  
О.С. Погорелова,  
Т.Г. Постнікова<sup>1</sup>**

*Київський національний університет будівництва і архітектури,  
Повітрофлотський просп., 31, м. Київ, 03680*

DOI: 10.32347/2410-2547.2019.103.33-42

Автори статті брали участь в роботі 4-ої міжнародної конференції з нелінійної механіки, організованій Lodz University of Technology (Польща) в травні 2019 року; виступили з доповіддю. Конференція була дуже представницька, багато відомих та видатних вчених з 23 країн світу взяли участь у її роботі. Було заслухано 7 пленарних та 102 секційні доповіді. Конференція була прекрасно організована і підготовлена. В статті автори діляться враженнями від її роботи.

**Ключові слова:** міжнародна наукова конференція, нелінійна механіка, видатні відомі вчені, доповідь, нелінійні явища, хаотична динаміка.

### **1. Вступ**

В травні 2019 року в Польщі, в Лодзі відбулася 4-а міжнародна конференція “Recent Advances in Nonlinear Mechanics” RANM2019 (“Останні досягнення в нелінійній механіці”). Вона була організована Lodz University of Technology (Лодзинським Технічним університетом Лодзька Політехніка).

Основною метою конференції був обмін думками, представленими різними науковими центрами, що займаються питаннями нелінійної механіки. На конференції було проведено предметне обговорення найважливіших і актуальних проблем, що стосуються нелінійних систем, включаючи ідентифікацію різних моделей сучасних інженерних пристроїв і пропозиції щодо рішень у цій галузі. Конференція взагалі є чудовою можливістю встановити або посилити наукове співробітництво між кращими фахівцями в цій галузі науки.

Нелінійна механіка відносно молода наука. Вона почала бурно розвиватися тільки наприкінці 20-го сторіччя. Одним з найбільш цікавих і досліджуваних розділів нелінійної динаміки є хаотичні коливання. Оpubлікована велика кількість статей, монографій і підручників з динамічної поведінки нелінійних динамічних систем [1-3]. Існує багато журналів з цієї тематики та проводяться міжнародні конференції.

Важливо, що детермінований хаос не є винятковим режимом динамічної поведінки нелінійної системи. Навпаки, такі режими спостерігаються у багатьох динамічних системах у математиці, фізиці, механіці, біології, медицині. В останній час подібні дослідження все

---

<sup>1</sup> Email address: [posttan@ukr.net](mailto:posttan@ukr.net)

частіше з'являються в економіці та соціології. Тому дослідження нелінійної динаміки є одним з магістральних шляхів у розвитку сучасних природничих наук. Зрозуміло, що конференція в Лодзі відповідає цьому сучасному напрямку розвитку.

Міжнародна конференція «Останні досягнення в нелінійній механіці» - це регулярна конференція, що організована провідними світовими технічними університетами. Завдяки цьому вона вже завоювала репутацію і визнана важливою науковою подією.

Серія конференцій RANM була розпочата в 2005 році в Абердіні, у Великобританії (Абердинський університет) та мала на меті створення платформи для взаємного збагачення та обміну дослідженнями у найрізноманітніших областях механіки з акцентом на нелінійні явища. Друга RANM 2009 пройшла у Куала-Лумпур, у Малайзії, і третя RANM 2014 – в Харбіні, у Китаї (Харбінський технологічний інститут, Китайський університет Ноттінгема.).

Конференції RANM були структуровані на основні симпозіумів з динаміки та механіки твердих тіл і рідин. Цього разу був введений новий симпозіум «Нелінійна фізика», у зв'язку з прогресом у тематиці, пов'язаній з механікою. Він включає синхронізацію, хаос і біфуркації, нейробиологічну динаміку, мультистабільність. Організація четвертої конференції RANM була підтримана Young Academy of the Polish Academy of Sciences (Молодою Академією Польської Академії наук). У рамках цієї співпраці “two rising stars” були запрошені виступити на конференції.

Конференція проводилася в Лодзі, місті потужної промислової спадщини. На початку 1800-х років Лодзь став “Promised Land” (Багатообіцяючою Землею), що приваблювала людей з усіх куточків Європи. Місто також було відоме своїм мультикультурним характером. Сьогодні, майже через 600 років з моменту отримання міських прав, Лодзь постійно розвивається, зосереджуючись на сучасних технологіях, інноваційній індустрії та підвищенні рівня життя своїх мешканців. Екскурсії, які були організовані конференцією, допомогли отримати відчуття міста та його оточення.

Конференція працювала 4 дні з 8.30 до 18.30 годин з невеликими перервами.

Відомими вченими було зроблено 7 пленарних лекцій та 102 секційні доповіді.

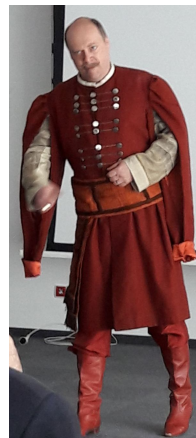
Матеріали конференції опубліковані в “Book of Abstracts” [4].

## 2. Організація конференції

Конференція була організована Лодзинським Технічним університетом (Лодзька Політехніка), одним з найбільших та найкращих польських університетів технічного профілю. На урочистому відкритті конференції виступали Ректор



Університету, Мер міста Лодзі, Голови конференції Prof. Przemyslaw Perlikowski (Польща) та Prof. Marian Wiercigroch (UK) – видатний вчений зі світовим ім'ям. Він був засновником цієї конференції у 2005 році, на фото на трибуні саме він. Після урочистих виступів відбулася Music Interlude (музичний антракт). На фото відомий польський співак виконує арії з опер видатного польського композитора Stanisław Moniuszko (Станіслава Монюшка). 200-річчя зі дня його народження відмічається у Польщі в цьому році.



Конференція відбувалася у будівлі Академічного спортивного та освітнього центру "Zatoka Sportu". У цій сучасній багатопверховій будівлі проходили усі засідання, а також Lunch Break. Центр має сучасний 50-ти метровий басейн з трибунами.



На фото під час Lunch Break крайній справа (невисокий сивий) – видатний вчений з Італії Prof. Giuseppe Rega. Його Plenary Lecture "Modelling and Nonlinear Dynamics of Thermomechanical Composite Plates" через свій фундаментальний характер викликала велику зацікавленість присутніх.

### 3 Науковий зміст конференції

Конференція була вельми представницькою. Перш за все, вражає широке охоплення країн, що надіслали на конференцію своїх доповідачів та учасників. Загалом цей список містить 23 країни: Ірландія, Угорщина, Великобританія, Бразилія, Польща, Україна, Японія, Італія, Китай, Індія, США, Тринідад і Тобаго, Португалія, Франція, Німеччина, Чехія, Росія, Південна Африка, Швейцарія, Болгарія, В'єтнам, Ізраїль, Нова Зеландія.

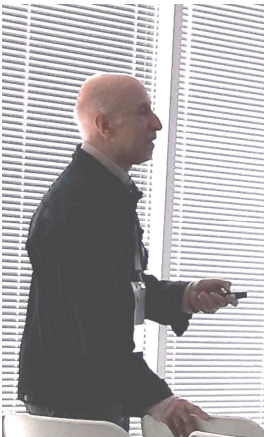
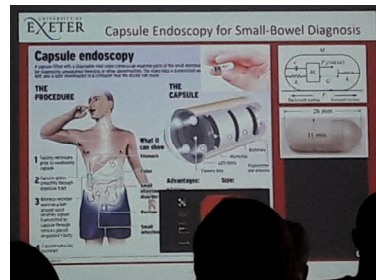
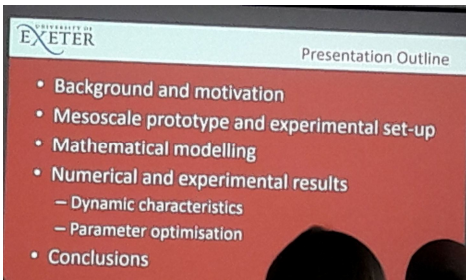
Пленарні лекції були виконані видатними вченими: Michael D Gilchrist (Ірландія), Giuseppe Rega (Італія), Lukasz Jankowski (Польща), Wojciech Sumelka (Польща), Awadhesh Prasad (Індія), Serhiy Yanchuk (Німеччина), Hiroshi Yabuno (Японія).

Секційні доповіді виконувалися на 3-х симпозиумах:

Симпозіум	Кількість доповідей
Symposium on Dynamics and Vibration	60
Symposium on Nonlinear and Complex Physics	14
Symposium on Solid Mechanics and Materials	28

Конференція мала деяку інженерну орієнтацію. У доповідях часто обговорювалися важливі питання нелінійної механіки на прикладах конкретних інженерних об'єктів. Майже у всіх доповідях був присутній розділ "Objectives and Motivation". Розглядалось багато експериментальних досліджень. З цієї точки зору нам сподобалась цікава і добре зроблена доповідь "Experimental Study of a Vibro-Impact Capsule System with Two-Sided Constraints" by Bingyong Guo, Yang Liu, Rauf Birler (College of Engineering, Mathematics and Physical Sciences, University of Exeter, UK).

В доповіді обговорювалось експериментальне дослідження динаміки системи віброударної капсули з двосторонніми обмежниками при варіаціях керуючих параметрів, включаючи амплітуду та частоту зовнішнього збудження. Механізм пересування капсули без будь-яких зовнішніх рухомих частин має безліч інженерних застосувань, таких як капсульна ендоскопія і інспекція трубопроводів, оскільки вона може бути інкапсульована (поміщена в капсулу) і рухатися незалежно в складному середовищі. У роботі досліджені динаміка і просування капсул в різних середовищах (напр., у синтетичному тонкому кишківнику).

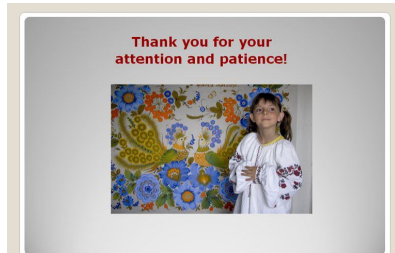
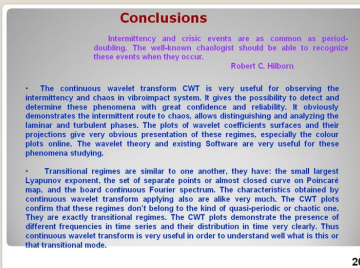
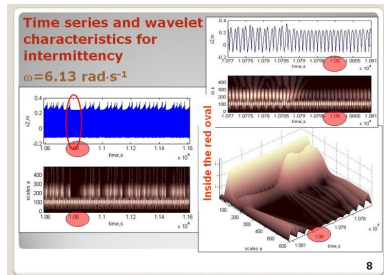


Від України були присутні 4 учасника. Крім авторів цієї статті був присутній професор Харківського Національного Технічного Університету (Харківський Політехнічний інститут) Міхлін Юрій Володимирович з доповіддю "Resonance behavior of the systems with Limited power supply having nonlinear absorbers".

Був також старший.наук.співроб., к ф.-м.н., Майстренко Юрій Леонідович. Він працює в Інституті математики та в центрі медичних та біотехнічних досліджень НАНУ. Він був Chair на двох засіданнях і брав участь як співавтор у 4-х доповідях. Співавторами у цих доповідях були таки відомі видатні вчені як Prof. Jürgen Kurths (Німеччина) та Prof. Tomasz Kapitaniak (Польща). Всього співавторів 7 (у одній доповіді) та 6 (у двох інших). В двох доповідях співавтором був к ф.-м.н. Роман Ігорович Левченко, співробітник Київського національного університету ім. Тараса Шевченко. Вражає широкий спектр співавторів з різних країн та наукових установ! Вражає широта наукових зв'язків! І

Міхлін Ю.В. і Майстренко Ю.Л. були членами Scientific Committee (Наукового Комітету) конференції.

Київський національний університет будівництва і архітектури був представлений доповіддю “Observing the Intermittent Transition to Chaos in Vibroimpact System with Wavelet Transform Applying” by V.A. Bazhenov, O.S. Pogorelova, T.G. Postnikova [4-8].



В доповіді обговорювалися сучасні проблема нелінійної динаміки, а саме сценарій переходу до хаосу через переміжність та явище граничного кризису. Цей сценарій був вперше помічений французькими вченими Y. Pomeau та, P. Manneville в 1980 році. Переміжність важко виявити звичайними засобами, такими як спектри Фур'є, показники Ляпунова, перерізи Пуанкаре. Prof. R.Hilborn писав [2]: “Intermittency and crisis events are as common as period-doubling. The well-armed chaologist should be able to recognize these events when they occur“. Саме сучасний математичний апарат безперервного вейвлет перетворення (Continuous Wavelet Transform) дозволяє впевнено ідентифікувати ці явища.

Між іншим відмітимо, що дівчинка на слайді сфотографована в музеї народної художниці України Катерини Білокур. Вона була жінкою важкої, але дивною долі. Мала золоті руки. Вишиванка на дівчинці зроблена нею власноруч. Музей знаходиться у селі Богданівка на 120 км траси Київ – Харків.

На жаль, від України було мало доповідей та доповідачів. Адже Польща близька до нас сусідня країна, ми маємо схожі мови. Польща була хазяйкою і представила 43 доповіді. У конференції взяли участь 104 польських науковців із 6 міст: Лодзі, Варшави, Познані, Люблінна, Щецина, Кракова.

Звичайно, і робочою мовою і мовою спілкування була англійська. Хочеться підкреслити, що усі учасники вільно володіють цією мовою. Не є секретом, що наукова література також публікується переважно англійською. Відомо, що багато вчених з різних країн світу працюють в провідних топ-університетах Європи та Америки. Вони змушені спілкуватися англійською. Таким чином, щоб досягти успіхів в науці, абсолютно необхідно володіти англійською! Між іншим відмітимо, що в Харківському Національному Технічному університеті (Харківський Політехнічний інститут) з викладачами та науковцями проводяться обов'язкові заняття з англійської на протязі всього навчального року.

Мова спілкування населення, звичайно, виключно польська.

#### 4. Знайомство з пам'ятками Лодзі

Лодзь - це місто в центральній частині Польщі, колишній центр текстильної індустрії. Величезна мануфактура була побудована в Лодзі і працювала з початку 19-го сторіччя. Зараз в приміщеннях цієї величезної мануфактури туристичне містечко. Музеї, зокрема, музей мануфактури, ресторанчики, парки, готелі.

Польща взагалі славиться величезною кількістю пам'яток, унікальних, цікавих місць. Саме до таких місць можна віднести польські етнографічні парки – музеї під відкритим небом. Оргкомітет конференції провів цікаву екскурсію до фольклорно-етнографічного комплексу Lowicz and Mauryse, старовинного села в Польщі, де збереглися дерев'яний костел та пам'ятки старожитнього побуту.



Оргкомітет конференції організував також екскурсію до музеїв Лодзі. Історія Лодзі представлена в Muzeum Miasta Łódź. Тут можна познайомитись з життям міста з кінця XIX століття до Другої світової війни. Окремо розповідається про життя відомого піаніста Arthur

Rubinstein (Артура Рубінштейна), є виставка його фотографій зі знайомими людьми, його різноманітних призвів (наприклад, золотий Оскар), його особистих речей. Артур Рубінштейн не жив і не працював в Лодзі, він тільки народився в Лодзі та провів тут раннє дитинство. Але Лодзь пишається своїм знаменитим земляком. На центральній туристичній вулиці Лодзі є бронзовий рояль, і Артур Рубінштейн біля нього.

Головна вулиця в Лодзі Piotrkowska street найдовша в Польщі і одна з найдовших в Європі – шлях від початку до кінця становить 4,9 км. Частина її пішохідна. Це туристична вулиця, тут багато бронзових малих і не дуже малих скульптур, багато магазинчиків, ресторанчиків та кафе. Є дві знамениті скульптури – рояль Рубінштейна та пам'ятник ліхтарнику. Його офіційна назва «Lampiarz» (автор Marcel Szytenchelm). Біля будинку 37 по приставленій до ліхтарного стовпа дробині піднімається людина в каргузі з лампочкою у руці.



Особо треба відмітити святкування 60-річного ювілею видатного вченого Prof. Tomasz Kapitaniak.

Лодзь є академічним містом з великим студентським населенням, і університети тут наполегливо працюють, щоб залучити студентів з усього світу. Prof. Tomasz Kapitaniak, Head of Division of Dynamics at the Lodz University of Technology, є головним магнітом в цій місії. Tomasz – вчений, всесвітньо відомий завдяки своїм дослідженням в хаотичній динаміці. Він народився і зростав в Лодзі. З початку своєї яскравої кар'єри був пов'язаний з Lodz University of Technology. Він побудував тут одну з найсильніших груп, що досліджують нелінійну динаміку. Його таланти є широкими, і список досягнень є занадто довгим, щоб тут його приводити, але не можна не згадати про його обрання в Polish Academy of Sciences та

його виставки живопису. Він також особливо славиться своїм почуттям гумору та людяністю.

Його вшанування під час Conference Dinner було дуже урочистим і в той же час теплим і дружнім. Було багато квітів, подарунків та дуже яскравих промов.

#### 4. Висновки

1. Враження від участі у роботі міжнародної конференції зайвий раз підкреслює відому істину про необхідність широкого спілкування з вченими різних шкіл та країн. Це дає можливість відслідковувати сучасні тенденції розвитку науки, оцінювати рівень своєї наукової діяльності та знаходити свою нішу серед досліджень, що бурно розвиваються.

2. В цьому зв'язку доводиться шкодувати про дуже малу кількість доповідей та учасників конференції від України. Мабуть, це свідчить по-перше, про малу кількість наукових праць достатньо високого рівня і по-друге, про матеріальні складнощі, що пов'язані з участю в конференції.

3. Участь у роботі конференції яскраво висвітлює потрібність вільного володіння англійською мовою, необхідного, щоб досягти успіху у науві двьляльності.

4. Низька доповідей продемонструвала, що у сучасній науці важливу роль грає міждисциплінарний підхід. Він має забезпечити вдалий підбір застосувань результатів досліджень в різних областях науки та практики завдяки тому, що чисельні дослідження, чисельне моделювання дозволяють розв'язати безліч задач, які не могли знайти свого розв'язання аналітичними методами. Спостереження явищ нелінійної динаміки у багатьох динамічних системах у математиці, фізиці, механіці, біології, медицині, а також в економіці та соціології, допоможе знайти цікаву та перспективну галузь використання можливих чисельних досліджень, наприклад, в кліматології та екології.

5. Такі застосування можуть допомогти знайти зацікавлених людей в інших галузях, знайти міждисциплінарні зв'язки в других наукових установах та країнах, що є вкрай необхідним в теперішній час.

Саме міжнародна наукова конференція є таким заходом, що дозволяє познайомитися з вченими різних країн та їхніми роботами, показати себе та встановити особисті та наукові зв'язки з вченими з інших наукових шкіл та країн.

#### СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Nayfeh, A.H. & Balachandran, B.* (2008). Applied nonlinear dynamics: analytical, computational, and experimental methods. John Wiley & Sons.
2. *Hilborn, R.C.* (2000), Chaos and nonlinear dynamics: an introduction for scientists and engineers, Oxford University Press on Demand.
3. *Schuster H.G.* Deterministic Chaos. An Introduction 2nd Revised Edition. – 1988.
4. Fourth International Conference on Recent Advances in Nonlinear Mechanics, RANM 2019, Lodz University of Technology (TUL), Book of Abstracts ,May 2019.
5. *Bazhenov, V.A., O.S. Pogorelova, and T.G. Postnikova.* "Intermittent transition to chaos in vibroimpact system." Applied Mathematics and Nonlinear Sciences 3.2 (2018): 475-486.
6. *Bazhenov V.A., Pogorelova O.S., Postnikova T.G., Lukyanenko O.O.* Wavelet transform using for analysis of vibroimpact system chaotic behavior // Strength of Materials and Theory of Structures. – 2018. – Issue. 101 (00). – P. 14 – 25.



7. *Bazhenov V.A., Pogorelova O.S., Postnikova T.G.* (2019). Intermittent and quasi-periodic routes to chaos in Vibroimpact System: Numerical simulations, LAP LAMBERT Academic Publ. GmbH and Co. KG Dudweiler, Germany.
8. *Bazhenov V.A., Pogorelova O.S., Postnikova T.G.* Study of Routes to Chaos in Vibroimpact System with Continuous Wavelet Transform// Journal of Vibration Testing and System Dynamics. – 2019. (in press)

Стаття надійшла 28.06.2019

*Bazhenov V.A., Pogorelova O.S., Postnikova T.G.*

#### **FOURTH INTERNATIONAL CONFERENCE ON RECENT ADVANCES IN NONLINEAR MECHANICS RANM 2019**

The authors took part in the work of the Fourth International Conference on Recent Advances in Nonlinear Mechanics that was holding in Poland, in Lodz in May 2019. They contributed the presentation titled "Observing the Intermittent Transition to Chaos in Vibroimpact System with Wavelet Transform Applying" by V.A. Bazhenov, O.S. Pogorelova, T.G. Postnikova. They told about watching the intermittency route to chaos and the boundary crisis in vibro-impact system with a small change in the control parameter. The presentation was illustrated by bright slides. The surfaces of wavelet coefficients and their projections show the system chaotic motion and intermittency very visibly and clearly.

The conference was very representative, and many well-known prominent scientists from 23 countries attended the conference. 7 plenary lectures and 102 sectional reports were heard. Well-known distinguished scientists Professors Marian Wiercigroch (UK) and Przemyslaw Perlikowski (Poland) were the chairs of conference. The conference had some, we can say, engineering orientation. The reports often discussed important issues of nonlinear mechanics on examples of specific engineering objects. Almost all reports presented the section "Objectives and Motivation". Many experimental results were discussed.

Unfortunately, there were only 4 participants from Ukraine, only 2 contributions were made by Ukrainian scientists themselves. But there were 4 contributions with a large number of famous co-authors from different countries and 2 co-authors from Ukraine among them. Poland as the hostess presented 43 reports and 104 participants. Of course, English was the work language and the language of communication.

The conference was perfectly organized. The organizers held two wonderful excursions. There was excellent music interlude as Opening Ceremony. There was a great congratulation to the famous scientist Professor Tomasz Kapitaniak on his anniversary at the Conference Dinner.

In the article, the authors share their impressions about the work of the conference.

**Keywords:** international scientific conference, nonlinear mechanics, prominent well-known scientists, report, nonlinear phenomena, chaotic dynamics.

УДК 539.3

*Баженов В.А., Погорелова О.С., Постникова Т.Г.* Четверта міжнародна конференція "recent advances in nonlinear mechanics" RANM2019 ("Останні досягнення в нелінійній механіці") // Опір матеріалів і теорія споруд: наук.-тех. збірн. – К.: КНУБА, 2019. – Вип. 103. – С. 33-42.

Лл. 14. Бібліогр. 8 назв.

UDC 539.3

*Bazhenov V.A., Pogorelova O.S., Postnikova T.G.* Fourth international conference on recent advances in nonlinear mechanics RANM 2019. // Strength of Materials and Theory of Structures: Scientific-and-technical collected articles. – К.: KNUCA, 2019. – Issue 103. – P. 33-42. – Ukr. Fig. 14. Ref. 8.

УДК 539.3

*Баженов В.А., Кривенко О.П., Ворона Ю.В.* четвертая международная конференция "recent advances in nonlinear mechanics" RANM2019 ("Последние достижения в нелинейной механике") // Опір матеріалів і теорія споруд: наук.-тех. збірн. – К.: КНУБА, 2019. – Вип. 103. – С. 33-42.

Лл. 14. Библиогр. 8 назв.

**Автор (вчена ступень, вчене звання, посада):** доктор технічних наук, професор, академік Національної академії педагогічних наук України, директор НДІ будівельної механіки **БАЖЕНОВ Віктор Андрійович**

**Адреса робоча:** 03680 Україна, м. Київ, Повітрофлотський проспект 31, Київський національний університет будівництва і архітектури, **БАЖЕНОВУ Віктору Андрійовичу**

**Робочий тел.:** +38(044) 245-48-29;

**Мобільний тел.:** +38(067) 111-22-33;

**Імейл:** [bazhenov.va@knuba.edu.ua](mailto:bazhenov.va@knuba.edu.ua)

**ORCID ID:** <http://orcid.org/0000-0002-5802-9848>

**Автор (вчена ступень, вчене звання, посада):** кандидат фізико-математичних наук, старший науковий співробітник, провідний науковий співробітник НДІ будівельної механіки **ПОГОРЕЛОВА Ольга Семенівна**

**Адреса робоча:** 03680 Україна, м. Київ, Повітрофлотський проспект 31, Київський національний університет будівництва і архітектури, **ПОГОРЕЛОВІЙ Ользі Семенівні.**

**Робочий тел.:** +38(044) 245-48-29

**Мобільний тел.:** +38(067) 606-03-00

**Імейл:** [pogos13@ukr.net](mailto:pogos13@ukr.net)

**ORCID ID:** <http://orcid.org/0000-0002-5522-3995>

**Автор (вчена ступень, вчене звання, посада):** кандидат технічних наук, старший науковий співробітник НДІ будівельної механіки **ПОСТНІКОВА Тетяна Георгіївна**

**Адреса робоча:** 03680 Україна, м. Київ, Повітрофлотський проспект 31, Київський національний університет будівництва і архітектури, **ПОСТНІКОВІЙ Тетяні Георгіївні.**

**Робочий тел.:** +38(044) 245-48-29

**Мобільний тел.:** +38(050) 353-47-19

**Імейл:** [postnikova.tg@knuba.edu.ua](mailto:postnikova.tg@knuba.edu.ua)

**ORCID ID:** <http://orcid.org/0000-0002-6677-4127>

UDC 624.044.3

## THERMAL STRESS STATE OF REINFORCED CONCRETE FLOOR SLAB

**M.S. Barabash**<sup>1,2</sup>,

Doctor of Technical Sciences, Associate Professor

**M.A. Romashkina**<sup>2</sup>,

Candidate of Technical Sciences

**O.U. Bashynska**<sup>1,2</sup><sup>1</sup>National Aviation University<sup>2</sup>Limited liability company "LIRA SAPR"

DOI: 10.32347/2410-2547.2019.103.43-56

**Abstract.** The article provides research of the stress-strain state of a reinforced concrete floor slab under fire conditions according to refined method. The finite element model of the slab is created. At the first stage of the research, one solved the unsteady heat conduction problem. According to the solution of the problem, it is possible to obtain the temperature fields all over the section of the considered structural element at certain intervals of time. The second stage of the study is strength analysis. Due to the strength evaluation, it is possible to investigate the work of the floor slab at different time points of fire exposure. Several mathematical models are considered. These models correspond to different points in time of fire impact. In each design model of the floor slab, the strength and deformation characteristics of concrete and reinforcement were deepened in accordance with the section temperature. It made three types of fire resistance analysis of the structure: linear analysis, physically-nonlinear analysis, and physically-nonlinear analysis with taking into account the effect of creep. The results of comparison of the kinetic performance of the mathematical models in various problem statements are showed. The technique, which allows to take into account the influence of creep in the numerical simulation of fire effect is proposed.

**Keywords:** finite elements methods, structures, thermal stress state, numerical experiments, thermal conductivity, comparisons.

**1. Introduction.** The fire resistance analysis of structures is one of the most important design stages. The building rules expound several variants of fire resistance analysis of structures: simplified, qualified methods of calculation and the calculation with reference to the tabular data.

The calculation with reference to the tabular data is the easiest way when you can determine the thickness of the concrete protective layer, according to the fire resistance class of the structure and geometry of the section.

In the simplified analysis method, it is estimated that concrete at temperatures above 500°C can't be taken into account in the operation of the structure. Therefore, it is necessary to determine the temperature distribution all over the cross-section of every element. According to the temperature fields distribution we have to perform a strength calculation of the reduced cross section. But, the abovementioned analysis types have some limitations. For example, the calculation with reference to the tabular data must only be used for a certain level of loads, eccentricity values and flexibility of elements. A simplified method doesn't give us the opportunity to take into account changes in the strength characteristics of materials caused by increasing temperature. At the same time, the proposed analysis method is universal for any mathematical model and makes

it possible to take into account the changes of the properties of concrete and reinforcement during a fire action. While realizing the fire resistance analysis of buildings and structures, for every engineer the most important thing is a choice of building rules and regulatory documents. The choice of these documents depends on the country in which the construction is planned to be built. In any of such documents [1, 2, 3, 4], it is stated that in order to perform a qualified calculation method of the structure for fire resistance, it is necessary first of all to know how the temperature will be distributed all over the cross section of each structural element which is exposed to fire impact. To accomplish the task it is necessary to carry out the heat transfer engineering analysis by the finite element method [1, 2, 3], or by the finite difference method. Based on the temperature distribution data, it is necessary to take into account the change in material properties and to perform a strength analysis. The regulatory documents also state that with this approach it is necessary to take into account creep deformations.

According to the qualified methods of calculation, it is necessary to do a thermal design. On the basis of the thermal design it is necessary to change the mechanical properties of materials.

In order to perform a thermal design, it is necessary to solve the problem of thermal conductivity. The equation for the boundary value problem of nonstationary heat conduction is given in the formula (1):

$$K_{xx} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + K_{yy} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + K_{zz} \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + w = \rho c \frac{\partial T}{\partial t}, \quad (1)$$

where  $T = T(x, y, z, t)$  – is thermal field in the area of  $\Omega$ ;  $K_{xx}, K_{yy}, K_{zz}$  – thermal conductivity along the axes  $x, y, z$ ;  $w = w(x, y, z, t)$  – heat source power inside the body;  $\rho$  – density;  $c$  – specific heat.

It is possible to solve this equation by the finite element method or by the finite difference method. When using the first method, the structure must be modeled by special finite elements with one degree of freedom - temperature, which is a scalar value.

After determining the temperature fields all over the structure, in the considered mathematical model it is necessary to lower the stiffness characteristics of the materials and to make strength calculation. With this approach, to determine the total deformations of the structure it is necessary to take into account the creep deformation. At the same time, the question of creep deformations determining in such a formulation of the question remains open.

Therefore, it can be argued that the study of determining methods for creep deformations, as well as taking them into account when calculating fire resistance and creating methods for numerical modeling of the effect of fire and occurrence of plastic deformations, is a relevant research topic.

A lot of scientists have been studying the effect of creep on the stress-strain state of structures [5, 6, 7, 8]. On the territory of the post-Soviet space, Maslov and his student Harutyunyan [9] were the first researchers of the field. Aleksandrovsky S.V. [10], Rabotnov Yu.N., Mileyko S.T. were engaged in studying the effect of temperature with regard to creep. Among the foreign

scientists the most famous are the works of the Czech scientist Zdeněk P. Bazant [11, 12, 13, 14]. In his work, he derived a formula to determine the creep function, which depends on the ambient temperature rise. A lot of modern scientific works are devoted to the problem of influence of concrete rheological properties on stress strain state of a structure [15, 16, 17, 18].

In [19] the problem of numerical modeling of the temperature state situation of reinforced concrete floor slabs is expounded. But the proposed method of calculating the floor slab does not take into account the interaction between the characteristic areas of concrete, because the floor slab is modulated by plates finite elements. In [20] there is a comparison of the methods for fire resistance analysis proposed in regulatory documents. But there is no comparison of calculations of real structures according to various regulatory documents. Therefore, it can be concluded that the process of modeling of floor slabs, taking into account the effects of high temperatures, is not sufficiently explored.

The question of the influence of concrete rheological properties on structure deformation is not sufficiently studied. Of course, there are some articles, in which the effect of temperature on concrete properties is considered. Such as [21, 22] or the previous works of the authors of the current article [23, 24], but in the literature there is no research on calculation of real structures with taking into account the effect of high temperatures and development of short-term thermal creep.

Since the main method to determine the stress-strain state of structures is the finite element method, so many works are devoted specifically to improving this method [25, 26, 27, 28]. One of the most famous scientist in the field of finite elements is Zienkiewicz O.C. [25, 26]. But there are practically no works that consider the effect of the rheological properties of concrete into stress strain situation of the structure taking into account the fire effect calculated by finite elements method.

The goal of the research is the studying the strength and deformation characteristics of reinforced concrete floor slabs under fire exposure.

To achieve this goal it has solved the following tasks:

- the problem of heat conductivity by the method of finite elements. By solving the problem, it revealed the temperature change all over the cross section of the structural element in time;
- linear and nonlinear strength problems, which consider changes of the strength and deformation properties of materials according to the temperature increasing.

**2. Methods.** In this article, the authors propose the fire resistance analysis methodology for reinforced concrete floor slabs, taking into account the influence of temperature creep. According to the proposed methodology, a floor slab should be divided into characteristic areas all over the whole structure. At the first step, it is necessary to perform the calculation of thermal conductivity and determine the temperature distribution all over the entire plate. After the thermal calculation, it is necessary to reduce the rigidity of the corresponding layers of the plate. The next step is the calculation of the creep coefficient depending on the temperature change of each layer of the plate. After that it is necessary to make a strength calculation considering the physical non-linearity of the structure.

To implement the proposed methodology, the finite elements of thermal conductivity were implemented on SPLIRA SAPR. The theory of the definition of some thermal finite elements is below.

If we introduce the boundary conditions to solve the quasi-harmonic equation (1), then this equation will be of the form of:

$$K_{xx} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} l_x + K_{yy} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} l_y + K_{zz} \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} l_z + q + h(T_s - T_b) = 0, \quad (2)$$

where  $l_x, l_y, l_z$  are directional cosines to the external normal boundary,  $q$  – heat flow,  $h(T_s - T_b)$  – convection heat losses ( $h$  – convection coefficient).

To solve the equation (2), the examined body is divided into finite elements, in which the degrees of freedom are temperatures at the nodes. At the same time, the temperature inside each element is approximated by linear polynomials.

Let's regard an example of some approximating polynomials of finite elements of thermal conductivity:

- three-nodal plane finite element:

$$T(x, y) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y; \quad (3.1)$$

- four-nodal isoparametric plane finite element:

$$T(x, y) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 xy; \quad (3.2)$$

- solid tetrahedral finite element:

$$T(x, y) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 z. \quad (3.3)$$

Since the linear polynomials are used to approximate the temperature function of a discrete model, the finite elements of thermal conductivity are also called simplex elements [26].

Substituting the values of nodal temperatures and coordinates of nodes into the corresponding polynomials we can obtain expressions for the coefficients  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ . If we return these coefficients into the equations 3.1 - 3.3, we can get the expression:

$$[T(x, y, z)] = [N(x, y, z)]_e \{T\}_e, \quad (4)$$

where  $[N(x, y, z)]_e$  – is a function form matrix.

Let's consider the matrix of thermal conductivity coefficients

$$K = \begin{bmatrix} K_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & K_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & K_{zz} \end{bmatrix}, \quad (5)$$

and the column matrix of temperature gradients, which is analogous to the stress matrix in the strength problem

$$\text{grad } T = \begin{bmatrix} \frac{\partial T}{\partial x} \\ \frac{\partial T}{\partial y} \\ \frac{\partial T}{\partial z} \end{bmatrix} = DT. \quad (6)$$

Then the contribution of each individual finite element to the solution of the problem of non-stationary heat conduction can be written as a matrix differential equation:

$$\{Q\}_e = [C]_e \frac{\partial}{\partial t} \{T\}_e + [K]_e \{T\}_e - \{Q\}_e^q - \{Q\}_e^g - \{Q\}_e^h, \quad (7)$$

where  $[K]_e$  – element conduction matrix (equivalent to stiffness matrix),

$$[K]_e = \int [B]^T [D] [B] dV + \int h [N]^T [N] dS, \quad (8)$$

$[C]_e$  – specific heat matrix (equivalent to damping matrix),

$$[C]_e = \int \rho c [N]^T [N] dV, \quad (9)$$

$\{Q\}_e^q, \{Q\}_e^g, \{Q\}_e^h$  - node heat transfer vector.

The study is based on the existing methods of the theory of elasticity, plasticity, short-term and long-term creep, generally accepted methods of static linear analysis and physically nonlinear analysis of reinforced concrete structures. The basis of the study was also the main hypotheses and rules adopted in structural mechanics and the mechanics of a deformable solid body.

The analysis of mathematical models was made on the basis of the software package “LIRA-SAPR”, on which the problem of heat conductivity and strength was solved. The heat transfer problem was modeled using finite elements of thermal conductivity. Heat transfer between the floor slab and air space was modeled by special finite elements of convection. The strength problem was implemented by using physically linear and nonlinear finite elements (depending on the formulation of the problem).

**3. Results and discussion.** To verify the results of theoretical studies, the test problem is solved. The dimensions of the test plate were: length - 16.5 m, width - 8 m, height of the plate (above the columns) - 600 mm, height of the plate in the span - 300 mm. Armature in the span (lower) - Ø16 and Ø20, reinforcement above the supports (upper) - Ø32.

Concrete is modeled by the solid isoparametric finite elements. The armature is modeled by finite elements of bar with number 210. The whole mathematical model includes 20390 finite elements.

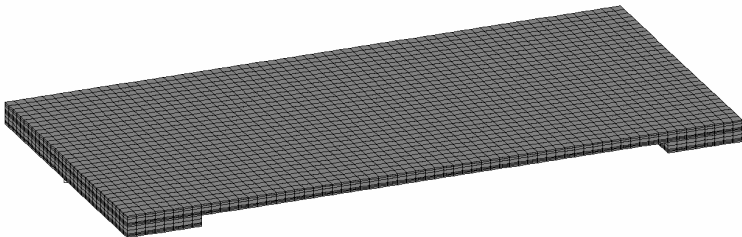


Fig. 1. The plate finite element model

The boundary conditions of symmetry are set on the boundary nodes. At the points of connection of the column to the floor slab, an analogue of the work of the columns was finite element with number 56, with stiffness corresponding to

the work of the columns in the span. In height, the plate is divided into 6 and 12 layers, in the span and on the supports, respectively.

To release heat transfer analysis and to determine the temperature fields, the cross section analysis of the floor slab is accomplished. Since the change of temperature all over the height of the cross section occurs uniformly, this makes it possible to consider the temperature distribution just along the part of the cross section of the same height.

To accomplish the heat transfer analysis the following heat-conducting properties of concrete were adopted: specific weight -  $2300 \text{ N/m}^3$ , thermal conductivity -  $1.2 \text{ J/(m}\cdot\text{s}\cdot^\circ\text{C)}$ , specific heat -  $710 \text{ J/(kg}\cdot^\circ\text{C)}$ . The convection coefficient according to paragraph 3.2.1 of [3] was assumed to be  $25 \text{ W/(m}^2\cdot\text{s)}$ . The temperature load was set according to the standard temperature of the fire. The ambient temperature at the initial moment of time is assumed to be  $20 \text{ }^\circ\text{C}$ . The results of the thermal analysis are shown in Figure 2.

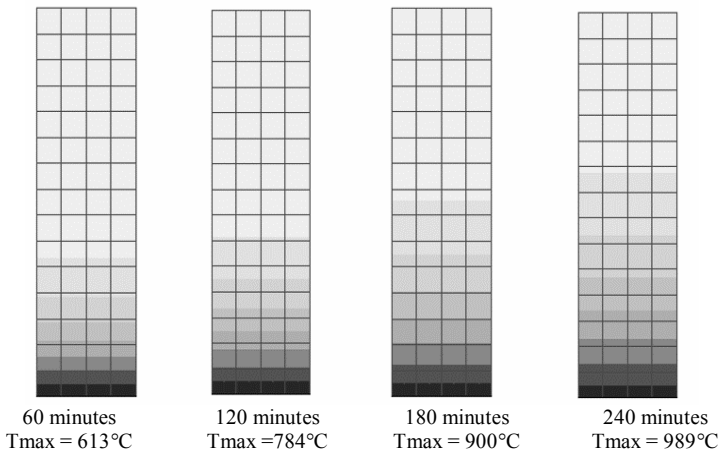


Fig. 2. The temperature field distribution all over the cross section of the floor slab in the span ( $h = 300\text{mm}$ ) at different timepoints

Obtained the distribution of temperature fields it set the reduced stiffness and strength characteristics to the corresponding layers of the floor slab. At Figure 3 it is shown an example how to determine the reduction factor for concrete compressive strength depending of the layer temperature. The reduction factors are taken from [3]. An example is shown for a section with temperature fields at 120 minutes of fire exposure.

At Figure 4 it shown an example of comparison of changes in the characteristics of the material depending of the temperature.



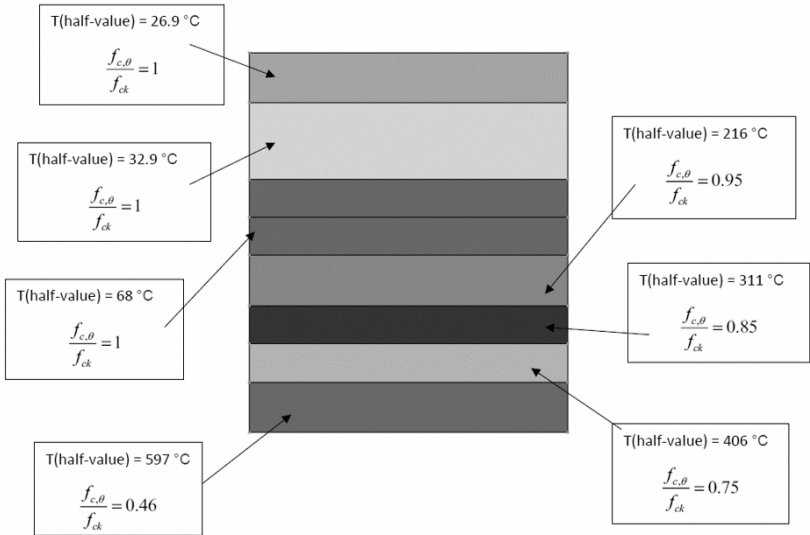
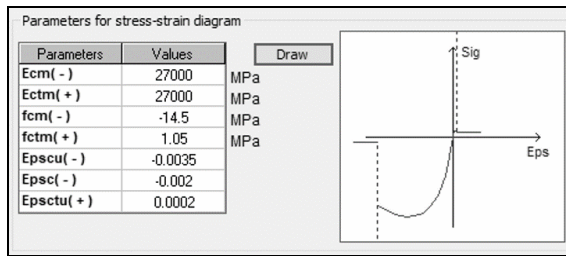
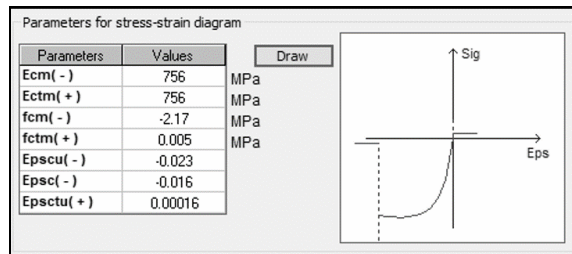


Fig. 3. Decrease of the concrete properties



(a)



(b)

Fig. 4. Comparison of concrete deformation parameters at temperature: (a) - 20°C; (b) - 800°C

When calculating the structures for fire resistance, it is necessary to take into account creep deformations. Therefore, in this study, it accomplished a comparison of the stress strain state of the structure with a physically non-linear calculation taking into account the influence of creep (which depends on temperature) and without creep.

To determine the total deformations of the structure, the creep function was calculated using the formula:

$$\Phi(T, t, t') = \sum_{t=t'}^{\tau} \varphi_T(t) \cdot H(t') \cdot n \cdot (f^{(n-1)}(t)) \cdot \Delta t. \quad (10)$$

Where  $\varphi_T$  – temperature function;  $H(t')$  – parameter that displays the change in the physical characteristics of concrete depending on the concrete age at the load application moment;  $t'$  – load application moment;  $t$  – moment of determination of structural deformations. The formula is based on the works of the Czech scientist Bazant Z.P. and described in detail in the works [23, 24].

After thermal analysis and definition of decrease concrete properties, it is possible to make a strength calculation of the floor slab at different timepoints: at 60, 120, 180 and 240 minutes of fire action. At Figure 5, it shows the deformed scheme of the slab in the 240th minute of fire exposure.

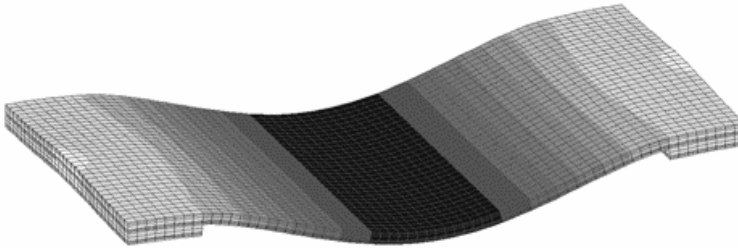


Fig. 5. Deformed floor slab model

With a static linear calculation, the maximum displacement of the structure along axis Z was 19.4 mm. Comparison of vertical displacements of the structure with a physically non-linear calculation is given in Table 1.

Table 1

Maximum displacement along axis Z

Analysis task type	Time (minutes)			
	60	120	180	240
Physically non-linearity	16	22	28	28.9
Physically non-linearity and creep	24.1	71.4	86.6	98.8

It is possible to see from the table that the values obtained by taking into account the physically non-linear operation of the structure and the lowered characteristics of the concrete, depending on the temperature increase, are completely different from the linear static calculation. In addition, the calculation with regard to creep gives us even greater increase in the vertical displacements of the structure.

Various reference documents describe different methods for determining creep deformations. Figure 6 shows a comparison of the deflections of a structure using different methods for determining creep deformations: the methods described in the Company's cod [2], Eurocode [3] and the author's method.

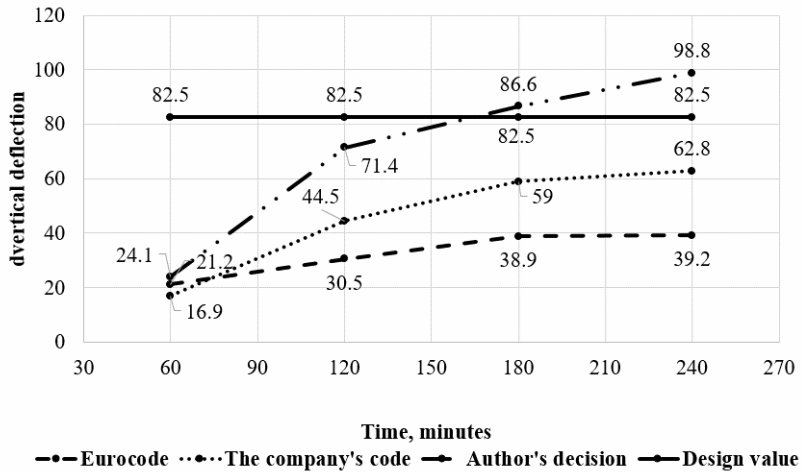


Fig. 6. Comparison of the model vertical displacement calculated with different creep models

According to the calculations performed with reference to the regulatory documents, this design model must withstand a fire load during 240 minutes. But according to the calculation performed with the author's methodology, it is clear that the stability of the structure is not ensured. And at the 160th minute of fire impact, the deflections exceed the maximum permissible values. The degree of fire resistance of the structure is R240, but according to the calculation performed with the author's methodology, it can be seen that the degree of fire resistance of the structure is not ensured.

At Figure 7, it shown a comparison of the quantity of destroyed finite elements of the floor slab over time. According to [3], the floor slab with thickness of 300 mm must withstand the fire impact during 240 minutes, upon condition that all design requirements are observed. But, at Figure 7 it shown that the structure lost its integrity.

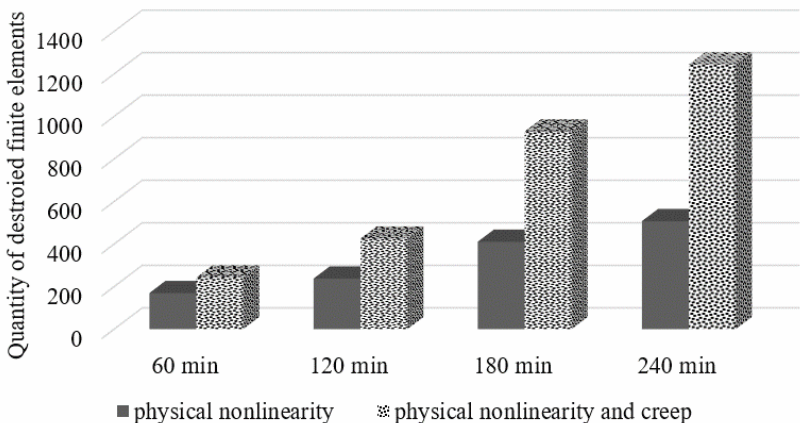


Fig. 7. Destroyed elements of the floor slab at various intervals

In compliance to Figure 7, in consequence of fire action the lower part of the concrete is completely destroyed already at the 180th minute of the fire expose and it lost its integrity. Therefore, it can be argued that in such situation, the lower reinforcement will heat up to the temperature above its hypothetical limit value (600 °C) and also lose its rigidity. While the upper half of the floor slab is still able to carry the load and may avoid destruction.

Such consequences occurred in the building of the shopping center called «Auchan» of the entertainment center Sky-Mall (Kiev, Ukraine) in the fall of 2017 as a result of fire action. The pictures of the real object, which corresponds to the mathematical model of the evaluated floor slab, are presented at Figure 8.

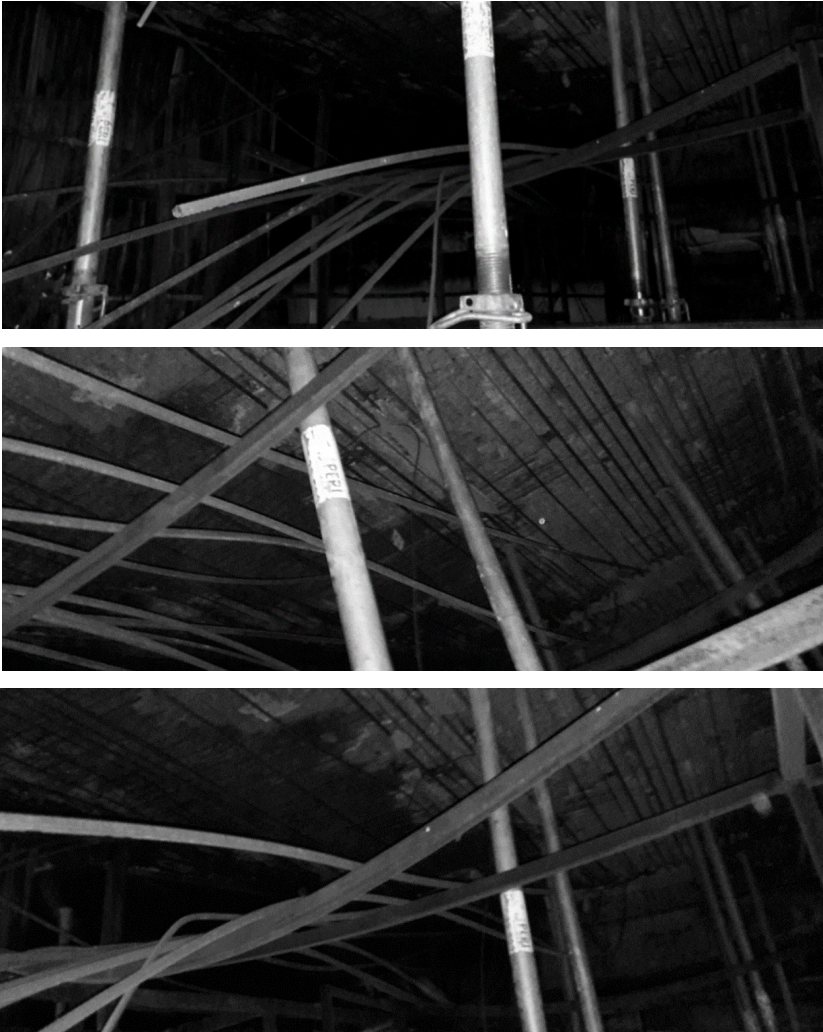


Fig. 8. Consequences of fire expose in «Auchan» store at «Sky Mall» shopping and entertainment center

The pictures are taken as a part of the implementation of scientific and technical works of the state enterprise called Scientific Institute of Building Constructions. The theme of the scientific and technical works is “Performing an examination of the supporting structures of the Auchan hypermarket building at the address: Kiev, Vatutina Ave., 2 and make a report about their technical condition with recommendations for ensuring their subsequent reliable operation”, (contract number is 5615 dated January 16, 2018).

**4. Conclusions.** Thus, the article presents the methodology of analysis of reinforced concrete structures under the effects of high temperatures. The methodology permits to take into account the influence of temperature distribution all over the cross section on the decrease of the strength and strain material properties of any structural unit. It represents the analysis of the material physical nonlinearity weight and the creep weight with the stress strain state of the structure.

The proposed methodology most accurately represents the work of the structure under fire exposure, and makes it possible to make the adequate fire resistance analysis of a structure and ensure their durability and reliability. It solved the test problem with performed analysis of the work of a reinforced concrete floor slab, taking into account the fire impact.

Taking into account the influence of creep it makes possible to determine the total deformations of the structure, and to perform the qualified method which let us to calculate any buildings or structures.

#### REFERENCES

1. Eurocode 2. Projektivannya zalizobetonnikh konstruksiy. Chastina 1-2. Zagalni polozhennya. Rozrakhunok konstruksiy na vognestiykist: DSTU-N EN 1992-1-2:2012 [Design of reinforced concrete structures. Part 1-2. General. Fireresistance calculation of structures] (EN 1992-1-2:2004, IDT).
2. STO 36554501-006-2006 Pravila po obespecheniyu ognestoykosti I ognesokhrannosti zhelezobetonnikh konstruksiy [Rules to ensure fire resistance and fire protection of reinforced concrete structures], Moskva: 2006.
3. EN 1992-1-2 (20014): Eurocode 2: Design of concrete structures – Part 1-2: General rules – Structural fire design [Authority: the European Union Per regulation 305/2011, directive 98/34/EC, Directive 2044/18/EC].
4. Guide for Modeling and Calculating Shrinkage and Creep in Hardened Concrete: ACI 209.2R-08. – U.S.A., American Concrete Institute, 2008. 48 p. (Guide for modeling and calculating).
5. *Barabash M.S.* Kompyuternoye modelirovaniye protsessov zhiznennogo tsikla obyektov stroitelstva: Monografiya [Computer simulation of the life cycle processes of construction objects: Monograph]. K.: Izd-vo «Stal», 2014. 301 p.
6. *Gorodetskiy A.S., Barabash M.S.* Uchet nelineynoy raboty zhelezobetona v PK LIRA-SAPR. Metod «Inzhenernaya nelineynost» [Accounting of non-linear work of reinforced concrete in SP LIRA-SAPR. Method "Engineering nonlinearity"]. // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering. 2016. №. 12 (2). Pp. 92-98.
7. *Savin O.B., Sobol V.M.* Zmishanyi variatsiyni funktsional v zadachakh povzuchosti ta poshkodzhuvanosti sterzhnivi pry zghyni [Mixed variational functional in the problems of creep and damage of rods at bending]// Strength of Materials and Theory of Structures, 2018. №100. Pp. 115-123.
8. *Iakovenko I., Kolchunov V.I.* (2017). The development of fracture mechanics hypotheses applicable to the calculation of reinforced concrete structures for the second group of limit states. Journal of Applied Engineering Science, vol. 15(2017)3, article 455, pp. 366–375.
9. *Arutyunyan N.Kh.* Nekotoryye voprosy teorii polzuchesti [Some questions of the theory of creep]. M.: Gostekhteorizdat, 1952. 323 p.
10. *Aleksandrovskiy S.V.* Raschet betonnykh I zhelezobetonnikh konstruksiy na temperaturnyye I vlazhnostnyye vozdeystviya (s uchetoм polzuchesti) [Calculation of concrete and reinforced

- concrete structures with temperature and humidity effects (including creep)]. M.: Stroyizdat, 1966. 443 p.
11. *Bazant, Z.P., Jirásek M.* Basic properties of concrete creep, shrinkage, and drying // *Solid Mechanics and its Applications*. 2018. №. 225. Pp. 29-62.
  12. *Bazant Z.P., Jirásek M.* Numerical analysis of creep problems // *Solid Mechanics and its Applications*, №. 225. 2018. Pp. 141-175.
  13. *Bazant Z.P., Cusatis G., Cedolin L.* Temperature effect on Concrete Creep Modeled by Microstress-Solidification Theory // *Journal of engineering mechanics*. 2004. Pp. 691-699.
  14. *Rahimi-Aghdam, S., Rasoolinejad, M., Bazant, Z.P.* Moisture Diffusion in Unsaturated Self-Desiccating Concrete with Humidity-Dependent Permeability and Nonlinear Sorption Isotherm // *Journal of Engineering Mechanics*. №. 145 (5). 2019.
  15. *Rasoolinejad, M., Rahimi-Aghdam, S., & Bazant, Z.P.* Correction to: Statistical filtering of useful concrete creep data from imperfect laboratory tests. *Materials and Structures/Materiaux et Constructions*. 2018. №. 51 (6).
  16. *Hubler M., Wendner R., Bazant Z.* Statistical justification of model B4 for drying and autogenous shrinkage of concrete and comparisons to other models // *Mater Structures*. 2015. №. 48(4). Pp. 797–814.
  17. *Wendner R., Hubler M., Bazant Z.* Optimization method, choice of form and uncertainty quantification of model B4 using laboratory and multi-decade bridge databases // *Mater Structures*. 2015. №. 48(4). Pp. 771–796.
  18. *Wendner R., Hubler M., Bazant Z.* Statistical justification of model B4 for multi-decade concrete creep using laboratory and bridge databases and comparisons to other models. *Mater Structures*. 2015. №. 48(4). Pp. 815–833
  19. *Krukovskiy P.G., Kovalev A.I., Chernenko K.A.* Modelirovaniye teplovogo sostoyaniya I ognestoykosti mnogopustotnogo zhelezobetonnoho perekrytiya [Simulation of thermal state and fire resistance of hollow-core reinforced concrete floor ] // *Zbirnik naukovikh prats LDU BZhD*. 2012. №. 21. Pp. 85-94.
  20. *Fomin S.L.* Raschet ognestoykosti zhelezobetonnykh plit perekrytiya po utochnennym I uproshtsennym metodam [Fire resistance calculation of reinforced concrete slabs according to refined and simplified methods ] // *Zbirnik naukovikh prats UkrDUZT*. 2016. №. 161. Pp. 145–157.
  21. *Pyskunov S.O., Shkryl O.O.* Vyznachennia trishchynostiikosti zakhysnoi obolonky yadernoho reaktoru pry termosylovomu navantazheni [Determination of the crack resistance of the protective shell of a nuclear reactor with a thermosetting load]// *Strength of Materials and Theory of Structures*, 2018. №101. Pp. 60–66.
  22. *Pyskunov S.O., Shkryl O.O.* Vyznachennia trishchynostiikosti zakhysnoi obolonky yadernoho reaktoru pry termosylovomu navantazheni [Influence of temperature regimes on the stress-strain state of structures] // *Strength of Materials and Theory of Structures*, 2018. №101. C. 103–110.
  23. *Bashinskaya O.Yu., Pikul A.V., Barabash M.S.* Resheniye zadachi termopolzuchesti betona metodom konechnykh elementov [Solution of the problem of concrete thermocreepiness by the finite element method] // sb. nauchn. trudov «Stroitelstvo. Materialovedeniye. Mashinostroyeniye», 2017. №. 99. Pp. 22-29.
  24. *Bashinskaya O.Yu., Barabash M.S., Pikul A.V.* Chislennoye modelirovaniye tsiklicheskogo temperaturnogo rezhima ekspluatatsii v PK «Lira-SAPR» [Numerical simulation of cyclic temperature model operation on the SP "Lira-SAPR"] // *Visnik Odeskoï derzhavnoi akademii budivnitstva ta arkhitekturi*, 2017. №. 67. Pp. 13-19.
  25. *Diez P., Rodenas J.J., Zienkiewicz O.C.* Equilibrated Patch Recovery error estimates: simple and accurate upper bounds of the error // *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 2007. №. 69 (10). Pp. 2075–2098.
  26. *Samuelsson A., Zienkiewicz O.C.* History of the stiffness method // *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 2006. №. 67. Pp. 149–157.
  27. *Ibrahimbegovic A., Melnyk S.* Embedded discontinuity finite element method for modeling of localized failure in heterogeneous materials with structured mesh: an alternative to extended finite element method // *Computational Mechanics*. 2007. №. 40 (1). Pp. 149–155.
  28. *Bazhenov V.A., Gulyar A.I., Maiboroda E.E., Piskunov S.O.* Semianalytic Finite-Element Method in Continuum Creep Fracture Mechanics Problems for Complex-Shaped Spatial Bodies and Related Systems. Part 1. Resolving Relationships of the Semianalytic Finite-Element Method and Algorithms for Solving the Continuum Creep Fracture Problems // *Strength of Materials*. 2002. №. 34 (5). Pp. 425–433.

*Барабаш М.С., Ромашикіна М.А., Башинська О.Ю.*

### **ТЕРМОНАПРУЖЕНИЙ СТАН ЗАЛІЗОБЕТОННОЇ ПЛИТИ ПЕРЕКРИТТЯ**

Проведено дослідження напружено-деформованого стану залізобетонної плити перекриття в умовах пожежі за уточненим методом. Створено скінченно-елементну модель плити перекриття. На першому етапі дослідження вирішено нестационарну задачу теплопровідності. Відповідно до рішення задачі, отримано температурні поля по всьому перерізу розглянутого конструктивного елемента через певні проміжки часу. Другий етап дослідження – розрахунок на міцність. Завдяки оцінці міцності можна дослідити роботу плити перекриття в різні моменти часу вогневого впливу. Розглянуто кілька математичних моделей. Ці моделі відповідають різним моментам вогневого впливу. У кожній розрахунковій моделі плити перекриття було змінено міцнісні і деформаційні характеристики бетону та арматури відповідно до температури перерізу. Виконано три типи аналізу вогнестійкості конструкції: лінійний аналіз, фізично-нелінійний аналіз і фізично-нелінійний аналіз з урахуванням ефекту повзучості. Показано результати порівняння кінематичних характеристик математичних моделей в різних постановках задач. Запропоновано методику, яка дозволяє врахувати вплив повзучості при чисельному моделюванні ефекту вогневого впливу.

**Ключові слова:** метод скінченних елементів, конструкція, термонапружений стан, чисельний експеримент, теплопровідність, порівняння.

*Барабаш М.С., Ромашикіна М.А., Башинская О.Ю.*

### **ТЕРМОНАПРУЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ ЖЕЛЕЗОБЕТОННОЙ ПЛИТЫ ПЕРЕКРЫТИЯ**

Проведено исследование напряженно-деформированного состояния железобетонной плиты перекрытия в условиях пожара по уточненному методу. Создано конечно-элементную модель плиты перекрытия. На первом этапе исследования решена нестационарная задача теплопроводности. Согласно решению задачи, получены температурные поля по всему сечению рассматриваемого конструктивного элемента через определенные промежутки времени. Второй этап исследования – расчёт на прочность. Благодаря оценке прочности можно исследовать работу плиты перекрытия в различные моменты времени огневого воздействия. Рассмотрены несколько математических моделей, в соответствии с различными моментами огневого воздействия. В каждой расчетной модели плиты перекрытия были изменены прочностные и деформационные характеристики бетона и арматуры в соответствии с температурой сечения. Выполнено три типа анализа огнестойкости конструкции: линейный, физически нелинейный и физически нелинейный анализ с учетом эффекта ползучести. Показаны результаты сравнения кинематических характеристик математических моделей в различных постановках задач. Предложена методика, которая позволяет учесть влияние ползучести при численном моделировании эффекта огневого воздействия.

**Ключевые слова:** метод конечных элементов, конструкция, термонапряженное состояние, численный эксперимент, теплопроводность, сравнение.

УДК 624.044.3

*Барабаш М.С., Ромашикіна М.А., Башинська О.Ю.* **Термонапружений стан залізобетонної плити перекриття** // Опір матеріалів і теорія споруд: наук.-техн. збірник. – К.: КНУБА, 2019. – Вип. 103. – С. 43-56.

*Представлено розрахунок залізобетонної плити перекриття на вогневий вплив із урахуванням впливу термоползучесті бетону. Розрахунок виконано в два етапи. На першому етапі вирішується задача нестационарної теплопровідності для визначення температурного поля по перерізу плити. На другому етапі виконано розрахунок на міцність з урахуванням жорсткісних і деформаційних характеристик бетону та арматури, а також із урахуванням впливу повзучості.*

Табл. 1. Іл. 8. Бібліогр. 28 назв.

UDC 624.044.3

Barabash M., Romashkina M., Bashynska O. **Thermal stress state of reinforced concrete floor slab** // Strength of Materials and Theory of Structures: Scientific-and-technical collected articles – Kyiv: KNUBA, 2019. – Issue 103. – P. 43-56.

*The fire influence analysis of reinforced concrete slabs with taking into account the impact of concrete thermal creep is presented. The calculation is made in two stages. At the first stage, it is solved the thermal conductivity analysis to determine the temperature fields all over the plate cross-sections. At the second stage, it is solved the structural analysis, taking into account the strength and strain properties of concrete and reinforcement, as well as the effect of creep.*

Tables 1. Fig. 8. Ref. 28.

УДК 624.044.3

Барабаш М.С., Ромашикіна М.А., Башинська О.Ю. **Термонапруженне состояние железобетонной плиты перекрытия** // Сопротивление материалов и теория сооружений: науч.-техн. сборник. – К.: КНУСА, 2019. – Вып. 103. – С. 43-56.

*Представлен расчет железобетонной плиты перекрытия на огневое воздействие с учётом влияния термползучести бетона. Расчет произведен в два этапа. На первом этапе решается задача нестационарной теплопроводности для определения температурных полей сечения плиты. На втором этапе происходит прочностной расчет с учетом понижения жесткостных и деформационных характеристик бетона и арматуры, и учетом влияния ползучести.*

Табл. 1. Ил. 8. Библиогр. 28 назв.

**Автор (науковий ступінь, вчене звання, посада):** доктор технічних наук, доцент, старший науковий співробітник, професор кафедри комп'ютерних технологій будівництва Навчально-наукового інституту аеропортів НАУ БАРАБАШ Марія Сергіївна.

**Адреса робоча:** 03058, Україна, м. Київ, просп. Космонавта Комарова 1, Національний авіаційний університет, Навчально-науковий інститут аеропортів. БАРАБАШ Марії Сергіївни

**Робочий тел.:** +38(044) 406-74-24.

**Мобільний тел.:** +38(095) 286-39-90.

**Імейл:** [bmari@ukr.net](mailto:bmari@ukr.net)

**ORCID ID:** <https://orcid.org/0000-0003-2157-521X>

**Автор (науковий ступінь, вчене звання, посада):** кандидат технічних наук, інженер-проектувальник ТОВ «ЛІРА-САПР» РОМАШКІНА Марина Андріївна.

**Адреса робоча:** 03058, Україна, м. Київ, пров. Киянівський 7а, ТОВ «ЛІРА-САПР».

**Адреса особиста:** РОМАШКІНА Марина Андріївна

**Робочий тел.:** +38(044) 406-74-24.

**Мобільний тел.:** +38(095) 931-52-50.

**Імейл:** [romashkina.liraland@gmail.com](mailto:romashkina.liraland@gmail.com)

**ORCID ID:** <https://orcid.org/0000-0002-7158-4037>

**Автор (науковий ступінь, вчене звання, посада):** асистент кафедри комп'ютерних технологій будівництва Навчально-наукового інституту аеропортів НАУ БАШИНСЬКА Ольга Юріївна.

**Адреса робоча:** 03058, Україна, м. Київ, просп. Космонавта Комарова 1, Національний авіаційний університет, Навчально-науковий інститут аеропортів. БАШИНСЬКА Ольга Юріївна

**Робочий тел.:** +38(044) 406-74-24.

**Мобільний тел.:** +38(063) 108-22-01.

**Імейл:** [olchik01@ukr.net](mailto:olchik01@ukr.net)

**ORCID ID:** <http://orcid.org/0000-0002-4161-782X>



УДК 539.375

## ВИЗНАЧЕННЯ ТРІЩИНОСТІЙКОСТІ РОТОРА ПАРОВОЇ ТУРБИНИ ПРИ ДІЇ ОБ'ЄМНИХ СИЛ

С.О. Пискунов<sup>1</sup>,  
д-р техн. наук

О.О. Шкриль<sup>2</sup>,  
д-р техн. наук

Ю.В. Максим'юк<sup>2</sup>,  
д-р техн. наук

<sup>1</sup>Національний технічний університет України "Київський політехнічний інститут  
ім. Ігоря Сікорського", м.Київ-56, просп. Перемоги 37, 03056

<sup>2</sup>Київський національний університет будівництва і архітектури, Київ  
Повітрофлотський просп., 31, м. Київ. 03680

DOI: 10.32347/2410-2547.2019.103.57-62

Проведена оцінка напружено-деформованого стану ротора парової турбіни з початковою напівеліптичною тріщиною при дії об'ємних сил, викликаних відцентровим навантаженням. Отриманий розподіл коефіцієнтів інтенсивності напружень вздовж фронту тріщини. Проведено порівняння з результатами оцінки тріщиностійкості ротора за спрощеними підходами.

**Ключові слова:** метод скінченних елементів (МСЕ), еліптична тріщина, коефіцієнт інтенсивності напружень, ротор парової турбіни, об'ємні сили.

**Вступ.** Визначення тріщиностійкості деталей конструкцій з тріщинами потребує обчислення параметрів механіки руйнування. Значна частина таких об'єктів використовується в машинобудуванні та енергетиці, до яких, зокрема, відносяться елементи та деталі турбін. В даній роботі проведено визначення тріщиностійкості диска ротора парової турбіни з початковою напівеліптичною тріщиною. Ротор знаходиться в умовах дії об'ємних сил, що викликані відцентровим навантаженням. В умовах лінійного деформування ротора оцінку тріщиностійкості доцільно виконувати на основі коефіцієнтів інтенсивності напружень (КІН). Розв'язання таких задач виконується переважно чисельними методами, серед яких найбільшого поширення здобув метод скінченних елементів. Для розрахунку кругових тіл ефективного застосування здобув напіваналітичний метод скінченних елементів (НМСЕ) [1, 3, 4]. Для визначенні КІН широко використовується прямий метод. Методика визначення КІН прямим методом в просторових тілах із застосуванням НМСЕ достатньо повно відображена в роботах [1, 3, 4]. Отже питання визначення тріщиностійкості диска ротора парової турбіни є актуальним на сьогоднішній день.

**Розрахунок диска ротора турбіни.** Диск ротора парової турбіни є масивним вісесиметричним тілом із центральним наскрізним отвором та ободом для закріплення бандажу з лопатками (рис. 1). Сили, що впливають на диск, обумовлені його обертанням із частотою  $n_o=3000$  об/хв і складаються з рівномірно розподіленого по площині бандажного обода

поверхневого навантаження інтенсивністю 68 МПа, що моделює вплив лопаток, і масових сил, що розподілені по об'єму диска.

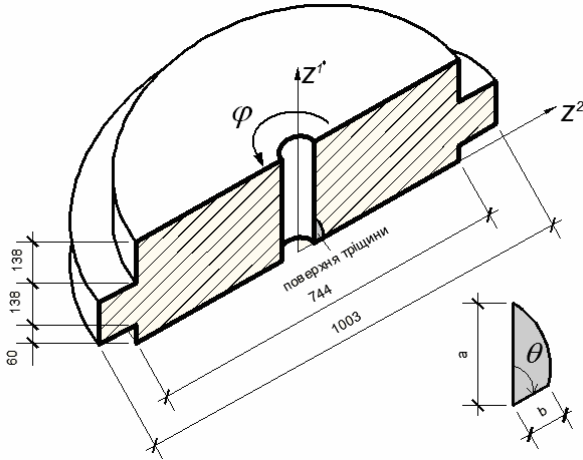


Рис. 1. Ротор парової турбіни

Масова сила  $dP$ , яка діє на елементарний об'єм матеріалу  $dV$ , що обертається навколо осі зі швидкістю  $n_o$  і розташований на відстані  $R = z^2$  від осі обертання, обчислюється за формулою:

$$dP = \rho w^2 R dV,$$

де  $\rho = 7850 \text{ кг/м}^3$  – щільність матеріалу диска,  $w = \pi n_o / 30$  – кутова швидкість обертання диску. Фізико механічні характеристики матеріалу  $E = 1.86 \text{ МПа}$ ,  $\nu = 0.3$ .

На першому етапі було визначено розподіл параметрів напружено-деформованого стану (НДС) диска ротора без тріщини. Дискретна модель диска, при якій досягнуто умови збіжності НДС при поступовому згущенні сітки SE в поперечному перерізі, наведена на рис. 2. Напружено-деформований стан суцільного ротора є вісесиметричним, а максимальні напруження виникають в області внутрішнього отвору, яка є найближчою до початку прийнятої системи координат (рис. 3).

На наступному етапі проводилось дослідження тріщиностійкості диска ротора з тріщиною, яка може з'явитися в місці найбільшого рівня напружень (рис. 1). Конфігурація тріщини має вигляд еліпсу із розмірами  $b=1 \text{ см}$ ,  $a=2 \text{ см}$ . Дискретна модель диска ротора з тріщиною показана на рис. 4.

Наявність тріщини призводить до порушення вісесиметричності напруженого стану. Зважаючи на необхідність моделювання граничних умов на берегах тріщини для побудови дискретної моделі використані кругові незамкнені скінченні елементи. Розрахункова модель – сектор ротора, відсічений двома площинами, розташований на відстані  $\varphi$  (рис. 1). В площині при  $\varphi = 0$  розташована тріщина. Граничні умови на обидвох площинах відповідають площинам симетрії за виключенням області

поверхні тріщини, яка вільна від закріплень. Виходячи з необхідності ефективної і достовірної апроксимації НДС в околі вершини тріщини і загального зменшення обчислювальних витрат, були проведені дослідження зі зменшення розміру дискретної моделі вздовж окружної координати ( $z^{3'} = \varphi$ ), що, в свою чергу, дозволяє зменшити кількість поліномів при використанні незамкненого кільцевого СЕ [1,3]. Як видно з отриманих розподілів колових напружень уздовж колової координати в точці їх найбільших значень, збурення напружень, пов'язані із наявністю тріщини швидко згасають, а величини колових напружень, отримані при  $\varphi = 45^\circ$  (штрихова лінія) і  $\varphi = 90^\circ$  (суцільна лінія), практично збігаються (рис. 5). Відповідно подальші дослідження проводились із використанням дискретної моделі при  $z^{3'} = \varphi = 45^\circ$  (1/8 частина ротора).

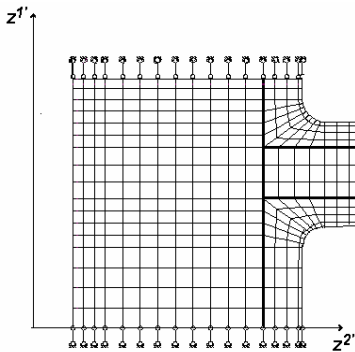


Рис. 2. Поперечний переріз дискретної моделі диска ротора парової турбіни

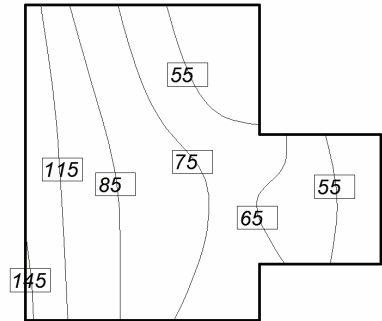


Рис. 3. Розподіл інтенсивності напружень в поперечному перерізі диска ротора без тріщини (МПа)

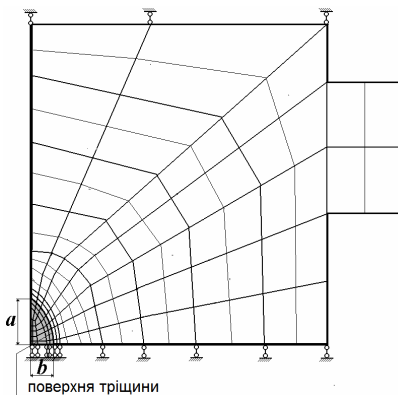


Рис. 4. Поперечний переріз дискретної моделі диска ротора з тріщиною

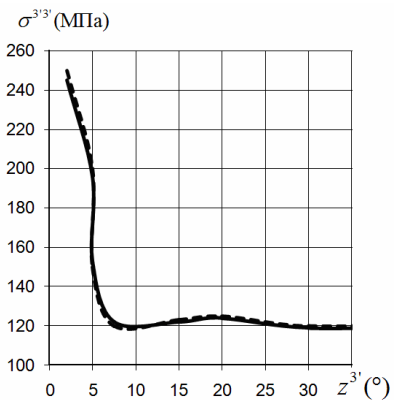


Рис. 5. Розподіл колових напружень уздовж колової координати

Отриманий розподіл вздовж фронту тріщини показує, що КІН

набувають максимальних значень при  $\theta = 90^\circ$  (рис. 6). Результати обчислення КІН для тріщин різної еліптичності для точки фронту  $\theta = 90^\circ$ , отримані на основі НМСЕ, показані на рис. 7.

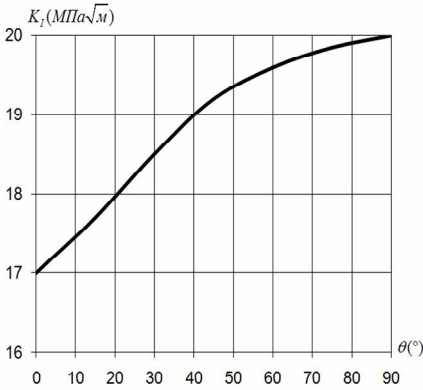


Рис. 6. Розподілення КІН вздовж фронту тріщини

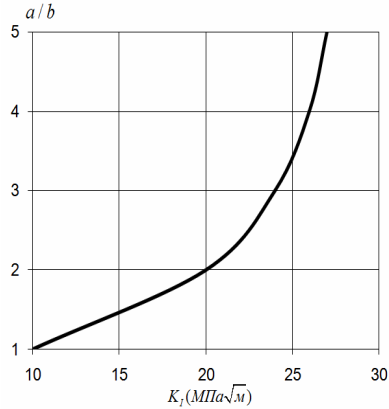


Рис. 7. Значення КІН при різній еліптичності

В інженерній практиці оцінку КІН виконують за формулою для пластини з бічним надрізом [2]:

$$K = 1,12\sigma^H \sqrt{\pi l_{\text{тр}}} , \quad (1)$$

де  $\sigma^H$  – номінальне напруження.

В якості номінальних напружень в (1) використовувались величини колових напружень, що були визначені в диску ротора без тріщини. Результати, позначені штриховою лінією отримані за величинами напружень в СЕ перед фронтом майбутньої тріщини (точка А на вставці рис. 8), а позначені суцільною лінією - за величинами напружень в СЕ за фронтом майбутньої тріщини (точка В на вставці рис. 8). Розрахунок проведений для тріщин різної еліптичності, що потребувало побудови відповідних дискретних моделей в поперечному перерізі ротора. Порівняння цих результатів показує, що при еліптичності тріщин  $a/b \leq 4$  значення КІН, обчислені за формулою (1), значно відрізняються від результатів просторового розрахунку, що урахує наявність еліптичної тріщини (рис. 8).

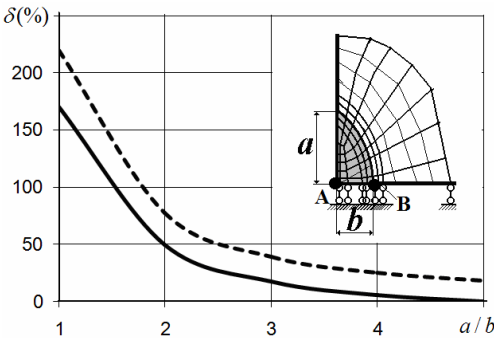


Рис. 8. Похибка КІН, обчислених за наближеною формулою (1)

Виконані дослідження тріщиностійкості диска ротора парової турбіни в просторовій постановці на

основі НМСЕ, дали змогу отримувати розподіл КІН вздовж фронту напівеліптичної тріщини. Отримані результати просторового розрахунку дозволили встановити межу можливості застосування використовуваних на практиці наближених підходів до достовірного визначення КІН.

## СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Баженов В.А., Гуляр О.І., Пискунов С.О., Сахаров О.С.* Напіваналітичний метод скінченних елементів в задачах руйнування просторових тіл: Монографія – К.: КНУБА, 2005. – 298с.
2. *Когаев В.П., Махутов Н.А., Гусенков А.П.* Расчеты деталей машин и конструкций на прочность и долговечность / М.: Машиностроение, 1985. – 223 с.
3. *Напіваналітичний метод скінчених елементів у задачах руйнування тіл з тріщинами* / [Баженов В. А., Пискунов С. О., Шкріль О. О.] – Київ: Вид-во "Каравела", 2017. – 208 с.
4. *Пискунов С.О. Шкріль О.О., Мицюк С.В.* Прямий метод визначення коефіцієнтів інтенсивності напружень в призматичних та просторових незамкнених тілах обертання при статичному навантаженні // Опір матеріалів і теорія споруд. – 2016. – Вип. 97. – С. 3-14.

## REFERENCES

1. *Bazhenov V.A., Gulyar A.I., Piskunov S.O., Saharov A.S.* Napivanalitchniy metod skinchennih elementiv v zadachah ruynuvannya prostorovih til (Semianalitic finite element method in problems of fracture spatial bodies): Monografiya – K.: KNUBA, 2005. – 298 p.
2. *Kogayev V.P., Makhutov N.A., Gusenkov A.P.* Rascheti detaley mashin i konstruksiy na prychnost' i dolgovechnost' / M.: Mashinostroyeniye, 1985. – 223 s.
3. *Napivanilitchniy metod skinchennikh yelementiv u zadachi ruynuvannya til z trishchinami* / [Bazhenov V. A., Piskunov S. O., Shkril' O. O.] - Kіv: Vid-vo "Karavela", 2017. - 208 s.
4. *Piskunov S.O. Shkril' O.O., Mityuk S.V.* Pryamiy metod viznachennya koyefitsientiv intenzivnosti napruzhen' v prizmatichnikh ta prostorovikh nezamknennikh tilakh obertannya pri staticheskom navantazheni // Opір materialiv i teoriya sporud. - 2016. - Vip. 97. - S. 3-14.

*Стаття надійшла 03.09.2019 р.*

*Piskunov S.O., Shkril' A.A., Maksimuk Yu.V.*

#### **DETERMINATION OF CRACK RESISTANCE OF A STEAM TURBINE ROTOR UNDER THE VOLUME FORCES ACTION**

The problem of the crack resistance of a steam turbine rotor disk with an initial semi-elliptical crack is investigated in this paper. The forces affecting the disk are due to its rotation and consist of a load uniformly distributed of the surface rim, modeling the impact of the blades, and mass forces distributed over the volume of the disk. It is assumed that the process of deformation of the rotor disk is linear. The stress intensity factor (CIF) are used to evaluate the fracture resistance. The steam turbine rotor disc is a massive axisymmetric body, which is why a semi-analytic finite element method is used to model the stress-strain state, which has been proven in a number of work for objects of this type. In the first stage, the distribution of stress-strain state of the rotor disc without crack is determined. The obtained results showed that maximum stresses occur in the region of the inner hole of the rotor disk. The following was to determine the fracture resistance of the rotor disc with a crack that may appear under the highest stress level. The configuration of the crack front is elliptical. The obtained results shows that the CIF attains the maximum value at the point furthest from the inner hole. The influence of ellipticity on the maximum values of CIF was investigated. The maximum CIN values for the rotor disc were determined using the approximate method used in the design of such objects. It involves the results of the known formula used to determine the CIF in the plate with a lateral crack. Comparison of results shows the necessity of calculate such objects in the spatial formulation. There are significant limitations to the use of the two-dimensional approach to determine CIF in such objects.

**Keywords:** finite element method (FEM), stress intensity factor, steam turbine rotor, elliptical crack, volume forces.

*Пискунов С.О., Шкріль А.А., Максимюк Ю.В.*

#### **ОПРЕДЕЛЕНИЕ ТРЕЩИНОСТОЙКОСТИ РОТОРА ПАРОВОЙ ТУРБИНЫ ПРИ ДЕЙСТВИИ ОБЪЕМНЫХ СИЛ**

Проведена оцінка напружено-деформованного станю ротора парової турбини с начальнoй полуюллиптичeской трещиной при действии оьемных сил, вызванных центробежными нагрузками. Получено распределение коэффициентов интенсивности

напружений вздовж фронту тріщини. Проведено порівняння з результатами оцінки тріщиностійкості ротора по упрощеним методам.

**Ключевые слова:** метод конечных элементов (МКЭ), коэффициент интенсивности напряжений, ротор паровой турбины, эллиптическая трещина, объемные силы

УДК 539.375

*Пискунов С.О., Шкріль О.О., Максим'юк Ю.В. Визначення тріщиностійкості ротора парової турбіни при дії об'ємних сил* // Опір матеріалів і теорія споруд: наук.-тех. збірн. – К.: КНУБА, 2019. – Вип. 103. – С. 57-62.

*Проведена оцінка напружено-деформованого стану ротора парової турбіни з початковою напівеліптичною тріщиною при дії об'ємних сил, викликаних відцентровим навантаженням. Отриманий розподіл коефіцієнтів інтенсивності напружень вздовж фронту тріщини. Проведено порівняння з результатами оцінки тріщиностійкості за спрощеними підходами.*

Табл. 0. Іл. 8. Бібліогр. 4 назв.

UDC 539.375

*Piskunov S.O., Shkriil' A.A., Maksymyuk Yu.V. Determination of crack resistance of a steam turbine rotor under the volume forces action* // Strength of Materials and Theory of Structures: Scientific-&Technical collected articles – Kyiv: KNUBA, 2019. – Issue 103. – P. 57-62. – Ukr

*The stress-strain state of a steam turbine rotor with an initial semi-elliptical crack under the action of volumetric forces caused by centrifugal loading was evaluated. The distribution of stress intensity factors along the crack front was obtained. The comparison with the results of the simplified approaches to crack resistance evaluation was made.*

Tabl. 0. Fig. 8. Ref. 4.

УДК 539.375

*Пискунов С.О., Шкріль А.А., Максимюк Ю.В. Определение трещиностойкости ротора паровой турбины при действии объемных сил* // Сопротивление материалов и теория сооружений: науч.-тех. сборн. – К.: КНУСА, 2019. – Вып. 103. – С. 57-62. – Укр.

*Проведена оцінка напружено-деформованого стану ротора парової турбіни з початковою напівеліптичною тріщиною при дії об'ємних сил, викликаних відцентровим навантаженням. Отриманий розподіл коефіцієнтів інтенсивності напружень вздовж фронту тріщини. Проведено порівняння з результатами оцінки тріщиностійкості по упрощеним методам.*

Табл. 0. Іл. 8. Библиогр. 4 назв.

**Автор (вчена ступень, вчене звання, посада):** професор, доктор технічних наук, завідувач кафедри динаміки і міцності машин та опору матеріалів НТУУ «КПІ ім. Ігоря Сікорського» Пискунов Сергій Олександрович.

**Адреса:** 03056 Україна, м. Київ, просп. Перемоги 37, Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського», кафедра динаміки і міцності машин та опору матеріалів.

**Мобільний тел.:** +38(050) 962-66-14

**Імейл:** [s.piskunov@ua.fm](mailto:s.piskunov@ua.fm)

**ORCID ID:** <https://orcid.org/0000-0003-3987-0583>

**Автор (вчена ступень, вчене звання, посада):** доцент, доктор технічних наук, професор кафедри будівельної механіки КНУБА Шкріль Олександрович.

**Адреса:** 03680 Україна, м. Київ, Повітрофлотський проспект 31, Київський національний університет будівництва і архітектури, кафедра будівельної механіки.

**Мобільний тел.:** +38(050) 307-61-49.

**Імейл:** [shkryl.oo@knuba.edu.ua](mailto:shkryl.oo@knuba.edu.ua)

**ORCID ID:** <https://orcid.org/0000-0003-0851-4754>

**Автор (вчена ступень, вчене звання, посада):** доцент, доктор технічних наук, доцент кафедри будівельної механіки КНУБА Максим'юк Юрій Всеволодович.

**Адреса:** 03680 Україна, м. Київ, Повітрофлотський проспект 31, Київський національний університет будівництва і архітектури, кафедра будівельної механіки.

**робочий тел.:** +38(044) 241-55-38.

**Мобільний тел.:** +38(067) 230-94-72.

**Імейл:** [maksymiuk.iuv@knuba.edu.ua](mailto:maksymiuk.iuv@knuba.edu.ua)

**ORCID ID:** <https://orcid.org/0000-0002-5814-6227>

UDC 539.3

## THE STRESS-STRAIN STATE INVESTIGATION OF UNDERGROUND STRUCTURES ON THE BASIS OF SOIL MODELS WITH ADJUSTED INPUT PARAMETERS

**I.I. Solodei,**

DSc, Department of Structural mechanics

**E.Yu. Petrenko,**

PhD, Department of Geotechnics

**Gh.A. Zatyliuk,**

Postgraduate student, Department of Structural mechanics

*Kyiv National University of Construction and Architecture*

DOI: 10.32347/2410-2547.2019.103.63-70

The article evaluates the possibility of using Hardening Soil Model and Coulomb-Mohr soil models with corrected input parameters by investigating the stress-strain state (SSS) of underground structures.

**Keywords:** underground structure, finite element method (FEM), Coulomb-Mohr model, Hardening Soil model, stress-strain station (SSS).

**Introduction.** The modeling of underground structures has to take into account a number of features fully: the difficult and nonlinear nature of the load, which remains until the occurrence of areas with different histories of use in the soil, as well as the nonlinear proper generation and deformation. Correct numerical modeling of such nonlinear deformation of underground structures is possible only for the use of modern soil models.

The selection and use of such models nowadays is a problem because of their low prevalence and excellent tradition of soil mechanics in the countries of the former Soviet Union, a large number of input parameters, the definition of which is not verified by regulatory documents, and the availability of quality reference literature, as most are written in foreign languages.

At present, various mathematical models of soil can be used in numerical modeling: Coulomb-Mohr Model, Hardening Soil Model and its derivatives (Hardening Soil Small-strain), Soft Soil and its derivatives, Cam-Clay, etc. They are characterized by varying degrees of complexity and range of use.

In the practice of design, the simple Coulomb-Mohr elastic-plastic soil model, which is based on the Hooke's law and Coulomb strength conditions, is very often used for geotechnical calculations. This model requires the determination of all four calculated soil parameters: total modulus  $E$ , Poisson coefficient  $\nu$ , clutch  $c$ , and internal friction angle  $\varphi$ . The advantages of simple models are the small number of input parameters and the simplicity of the equations. However, the simulation results, when used, may be fairly approximate and inconsistent with the actual data.

The Hardening Soil elastic-plastic model is an advanced nonlinear soil model that is versatile and suitable for modeling a wide range of soil soils. This model describes soil behavior more accurately. It separates the shear and bulk components of the deformations, since the dependences of the deformations on the stresses during the triaxial compression method test (in fact, the deviatoric load is modeled in the instrument) and the compression clutch (the isotropic load is modeled in the instrument). The "strain-strain deviator" curve in the model is described by a hyperbolic function. Unloading-reloading deformations occur on a separate trajectory. Three modules of deformation are used for realization of the above in the model: the modulus of deformation on the secular at 50% strength  $E_{50}$ , - the modulus of deformation at unloading and reloading  $E_{ur}$ , the oedometric module  $E_{oed}$ . The problems that may arise when these and other input parameters of the Hardening Soil Model are determined and the solutions are described in [1].

Another advantage of the Hardening Soil Model is that it describes the dependence of the deformation modules on the stress level:

$$E = E^{\text{ref}} \left( \frac{c \cos \varphi - \sigma_3 \sin \varphi}{c \cos \varphi + p^{\text{ref}} \sin \varphi} \right)^m. \quad (1)$$

The purpose of this article is to evaluate the possibility of using the Hardening Soil Model with insufficient input parameters using empirical formulas, and the possibility of more accurate modeling using the Coulomb-Mohr Model using the techniques proposed in the article.

In several sources attempts have been made to link the deformation modules of the Hardening Soil Model [2], and the Plaxis software complex uses the following dependencies, which are in the range of the indicated sources:

$$E_{ur} = 3E_{50}, \quad (2)$$

$$E_{oed} = E_{50}. \quad (3)$$

Another deformation parameter - the exponent  $m$  will be equal to 0.5, for the reasons given in [1], as the minimum of those that are appropriate to use in the Hardening Soil Model.

It is proposed, using these values and dependences for deformation parameters, to investigate the SSS of underground structures and to compare with the results obtained using the Hardening Soil model with the input parameters, which were determined in the laboratory and reported in [3]. From the same source we will use strength parameters. Their definition is clearly regulated and no difficult to use.

**Experiment 1.** The SSS of the soil mass under the effect of a 10 m wide stamp (plate) was investigated in the Plaxis. The considerable width was chosen considering the fact that the  $E_{oed}$  parameter, which is responsible for the volumetric component of deformations, will be subject of adjustment, since such zones appear below the plates, it will be possible to give a more accurate estimate of the possibility of using the calculated oedometric module. The soil characteristics for the Hardening Soil Model are from publication [3].

The dimensions of the soil model in the first case were taken from the considerations given in [4] – the lower boundary at a depth of 12 m, and the side



faces at a distance of 12 m from the edge of the plate. In the second case the dimensions are taken twice as large – 24 m respectively.

The results of the research showed that the accuracy of the simulation using the calculation modules depends on the initial relationship between the deformation characteristics of the soil. The greatest differences are predicted to arise when the true ratios differ substantially from those adopted empirically by formulas (2-3). So the difference between the deformation values for the loam ( $E_{50} = 40$  MPa,  $E_{oed} = 30$  MPa,  $E_{ur} = 160$  MPa,  $m = 0.7$ ) is about 15%, and for the loam ( $E_{50} = 170$  MPa,  $E_{oed} = 85$  MPa,  $E_{ur} = 850$  MPa,  $m = 1$ ) 35%. It should be noted that even such a difference can be considered satisfactory due to characteristics of the soil. Thus, the comparison of sediment values got in the software complex and calculated by the layer summation method showed a significant difference - the results of settlements using Hardening Soil Model are 1.5-2 times bigger than those calculated by the layer summation method. This can be explained by the fact that the original deformation modules (with reference index) were determined at a reference pressure  $p_{ref} = 100$  kPa, which actually measures up to some depth  $y_{ref}$ . According to formula (1), the values of the modulus of deformation at a smaller depth are smaller, and in the layer-by-layer method, the output module belongs to the "bottom surface" and increases with depth. It should be mentioned that the formulas in the Hardening Soil Model well describe the soil hardening itself, so it is recommended to choose the lowest reference pressure for this engineering-geological element (GEE) [1].

In addition, soil hardening (actually "scattering" of stresses with depth) in the layer-by-layer method is based on the theory of linearly deformed medium. The change of pressure with depth here does not depend on the characteristics of the soil, but only on the size of the platform that exerts pressure on the base:

$$\sigma = \frac{2 \cdot p}{\pi} \left( \arctg\left(\frac{\eta}{\zeta \cdot \sqrt{1 + \zeta^2 + \eta^2}}\right) + \frac{\zeta \cdot \eta \cdot (1 + \eta^2 + 2\zeta^2)}{(\eta^2 + \zeta^2) \cdot (1 + \zeta^2) \cdot \sqrt{1 + \zeta^2 + \eta^2}} \right), \quad (4)$$

where  $\eta$  – the ratio of the sides of the site,  $\zeta$  – the relative depth to the width of the site,  $p$  – the average pressure under the sole of the foundation.

In Hardening Soil, soil hardening is described by its characteristics, including density and depth.

The usage of the Coulomb-Mohr Model gives approximate values of precipitation to the calculated by layer-by-layer summation. However, only if the recommendations for the selection of boundaries of the calculation area are fulfilled. As the depth of the model increases, the SSS values at the base and plate increase in proportion to the depth. This problem and one of the possible ways to solve it are described in [5].

The described method has demonstrated its effectiveness once again. However, because of the features and differences discussed above, the Hardening Soil Model and the theory of linear deformed medium on which the methodology is based there is no need to speak about the convergence of results.

The Article [3] describes another approach to modeling soil hardening with depth. The model is broken down into layers, the modulus of deformation for each is calculated using formula (1). In this formulation, a fairly good

convergence of the deformation values with those obtained using the Hardening Soil Model is achieved. However, the stresses in the soil array and plate are not so well matched, but closer than usual using the Coulomb-Mohr Model.

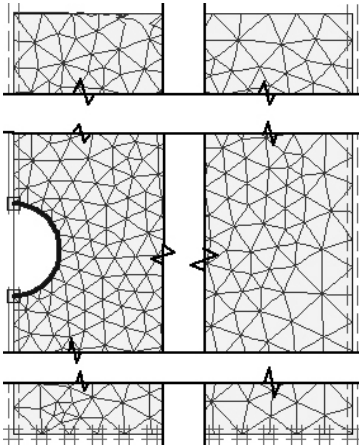


Fig. 1. The scheme of numerical experiment 2

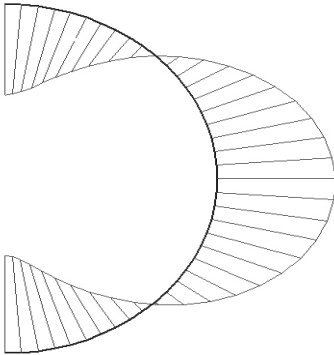


Fig. 2. The nature of the plot of the moments in the tunnel frame

**Experiment 2.** The SSS of the underground tunnel was investigated (Fig. 1). The depth of the tunnel was varied to investigate the effect of the thickness of the soil mass above the tunnel rim on the SSS. The lower boundary of the model also varied for the same reasons. The lateral face was simulated at a sufficient distance to minimize its impact on the SSS.

The direct dependence between the load on the soil mass above the underground structure and the depth of its deposition is preserved and does not depend on the soil models used. Such a change in constant loads does not correspond to the true state of affairs at great depths. This problem is considered in article [6].

As the thickness of the array under the tunnel increases, the value of raising the lower part of the tunnel frame increases. When using the Coulomb-Mohr Model, no direct correlation is observed without adjusting the parameters.

When using the Hardening Soil Model, the absolute values of the bottom of the tunnel are lower, because the model uses a deformation module during unloading-reloading, and the process of the excavation of soil from the tunnel space is accompanied by some unloading of the soil mass below it. In addition, the dependence of this module on the level of stresses in the soil array

reduces the influence of the values of the thickness of the array under the underground structure on the value of deformations.

The use of the Hardening Soil Model with the corrected parameters again confirms the conclusions drawn in the previous experiment and depends on the initial relationships between the deformation characteristics of the soil while maintaining the benefits of the model.

The possibility of using Coulomb-Mohr to involve techniques of increasing the modulus of deformation with depth allows to reduce the effect of the thickness of the array under the tunnel on the values of deformations, which still remain inflated compared to the values obtained using the model Hardening Soil.

In addition, the values of the moments in the frame, when calculating using the Coulomb-Mohr Model, are almost doubled compared to Hardening Soil. The nature of the charts remains unchanged. It somewhat reduces the value of modeling efforts to strengthen the soil with depth.

**Experiment 3.** The value of the modulus of deformation during unloading-reloading clearly illustrates an example of the calculation of a pit.

During the excavation of the soil, the bottom of the pit is washed out, due to the removal of its own stresses from the soil massif. However, in the absence of the unloading-reloading module, excavation modeling using the Coulomb-Mohr Model results are in an overestimation of the deformation values.

The validity of this model and the above assertion that due to the lack of dependence of the modulus of deformation on the stress level in the soil array, the value of deformation depends essentially on the thickness of the soil layer under the pit.

According to formula (3), an increased value of the modulus of deformation in the Coulomb-Mohr Model was specified for the entire massif and separately for the part of the excavated soil below the pit.

In both approaches, the results of the excavation of the bottom of the pit correspond to the obtained values when using Hardening Soil Model. Some differences are observed in the values of efforts in the retaining wall, the nature of the diagrams is consistent.

The use of the Hardening Soil Model with the adjusted parameters gave the expected results, which are consistent with the conclusions reached after the previous tasks have been solved.

**Conclusions.** The obtained results show that the possibility of using the Hardening Soil Model with the corrected parameters got using empirical formulas depends directly on the initial relations between the deformation characteristics of the soil. Therefore, formulas (2-3) should be refined depending on the type of rock, depth of occurrence, etc. after appropriate research. The same applies to the parameter  $m$ . It is necessary to carry out research for different breeds of different regions and to systematize the results obtained in tabular form, as they tried to do it in the publication [7].

At the same time, even such rough modeling with the Hardening Soil Model allows to use its advantages - nonlinear dependence between deformations and

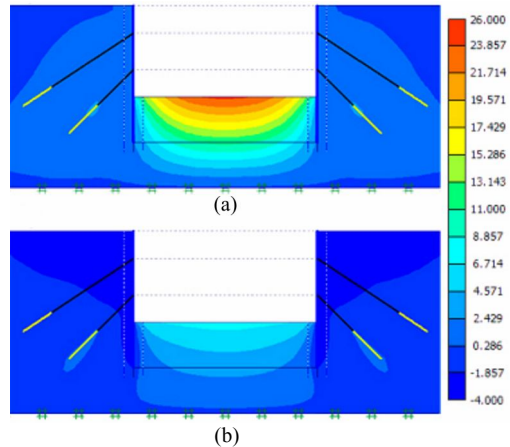


Fig. 3. Lifting the bottom of the pit after modeling the excavation process, mm:

- (a) when using the Coulomb-Mohr Model
- (b) when using the Hardening Soil Model

stresses, separation of the shear and bulk components of deformations, separate trajectory of deformations at unloading-reloading, dependence of deformation characteristics on the level of stresses in basis, etc.

However, not all software systems allow the use of Hardening Soil Model. Therefore, it is urgent to clarify the results when using the Coulomb-Mohr Model. The methods discussed in the article will help reduce the impact of this model's disadvantages on SSS and can be used depending on the task separately or in combination.

#### REFERENCES

1. *Solodei I.I.* Ispolzovanie gruntovykh modelej pri chislennom modelirovanii podzemnykh sooruzhenij (Using soil models in numerical simulation of underground structures) / I.I. Solodei, Gh. A. Zatylyuk // *Wschodnioeuropejskie Czasopismo Naukowe (East European Scientific Journal)* – Warszawa, Polska – 2019. – #8 (48) – część 2 – P. 48-55
2. *Orekhov V.V.* Ispol'zovanie modeli uprochnyayushhegosya grunta dlya opisaniya povedeniya peska razlichnoj plotnosti pri nagruzhenii (Using hardening soil model to describe the behavior of sand of different densities under loading) / V.V. Orekhov, M.V. Orekhov // *Vestnik MGSU.* – 2014. – №2. – P. 91-97.
3. *Holubev A.I.* Vybór modeli hrunta i eë parametrov v raschëtakh heotekhnicheskikh obektov (The choice of soil model and its parameters in the calculation of geotechnical objects) / A.I. Holubev A.V. Seletskii // *Trudy mezhdunarodnoi konferentsii po heotekhnike "Heotekhnicheskie problemy mehapolisov (GEOMOS 2010).* – 2010. – tom 4. – P. 1727-1732
4. *Perel'muter A.V.* Raschetny'e modeli sooruzhenij i vozmozhnost' ikh analiza (Design models of structures and the possibility of their analysis) / A.V. Perelmuter, V.I. Slivker. – Moscow: SKAD SOFT, 2011. 736 p.
5. *Solodei I.* Implementation of the linear elastic structure half-space in the Plaxis in the study of settlements / I. Solodei, Gh. Zatyliuk // *Proceedings of Odessa Polytechnic University,* – 2019. – Issue 1 (57) – P. 22-28.
6. *Solodei I.I.* Vyznachennia navantazhen vid masyvu hruntovykh sypuchykh porid pry proektuvanni pidzemnykh sporud (Determination of loads from array of running soil when designing underground structures) / I.I. Solodei, Gh.A. Zatyliuk // *Strength of Materials and Theory of Structures.* – 2016. – №97. – P. 145–154.
7. *Mirnyj A. Yu.* Statisticheskij analiz parametrov modeli hardening soil dlya gruntov moskovskogo regiona (Statistical analysis of hardening soil model mechanical parameters for Moscow region soils) / A. Yu. Mirnyj, K. A. Budoshkina, V. V. Shishkina // *Geotechnics.* – 2017. – № 4. – P. 58-64.

*Стаття надійшла 18.09.2019 р.*

*Солодей І.І., Петренко Е.Ю., Затиліук Г.А.*

#### **ДОСЛІДЖЕННЯ НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНОГО СТАНУ ПІДЗЕМНИХ СПОРУД НА ОСНОВІ ҐРУНТОВИХ МОДЕЛЕЙ З КОРЕГОВАНИМИ ВХІДНИМИ ПАРАМЕТРАМИ**

В статті дана оцінка можливості застосування ґрунтових моделей з корегованими вхідними параметрами, шляхом дослідження НДС підземних споруд.

Сьогодні існує велика кількість різних математичних моделей ґрунту: Кулона-Мора, Hardening Soil Model та її похідні (Hardening Soil Small-strain), Soft Soil та її похідні, Cam-Clay тощо. Вони характеризуються різним ступенем складності та діапазоном використання.

В геотехнічній практиці для проведення розрахунків дуже часто використовується найпростіша ідеально пружно-пластична ґрунтова модель Кулона-Мора, яка має ряд недоліків. Hardening Soil Model – вдосконалена нелінійна модель ґрунту, яка є досить універсальною і підходить для моделювання широкого діапазону ґрунтів основ. До особливостей моделі можна віднести використання нелінійної залежності між деформаціями та напруженнями, розділення зсувної та об'ємної складових деформацій, окрема траєкторія деформацій при розвантаженні-повторному навантаженні, залежність деформаційних характеристик від рівня напружень в основі тощо. Однак, велика кількість вхідних параметрів, визначення яких не регламентовано нормативними документами, ускладнює можливість її використання.

Аналізується вплив на величина та характер розподілу напружено-деформованого стану підземних споруд при використанні моделі Hardening Soil з коригованими параметрами, отриманими за допомогою емпіричних формул.

Також актуальним є питання можливості використання моделі Кулона-Мора з залучення методик (різні варіанти збільшення модуля деформації з глибиною, використання модуля деформації  $E_{ur}$  при розвантаженні та повторному навантаженні), які дозволяють зменшити вплив недоліків цієї моделі на напружено-деформований стан підземних споруд.

**Ключові слова:** підземна споруда, метод скінченних елементів (МСЕ), модель Кулона-Мора, Hardening Soil Model, напружено-деформований стан (НДС).

*Solodei I.I., Petrenko E.Yu., Zatyliuk Gh.A.*

### **THE STRESS-STRAIN STATE INVESTIGATION OF UNDERGROUND STRUCTURES ON THE BASIS OF SOIL MODELS WITH ADJUSTED INPUT PARAMETERS**

The article evaluates the possibility of using Hardening Soil Model and Coulomb-Mohr soil models with corrected input parameters by investigating the stress-strain state (SSS) of underground structures.

Today there are many different mathematical models of soil: Coulomb-Mohr, Hardening Soil Model and its derivatives (Hardening Soil Small-strain), Soft Soil and its derivatives, Cam-Clay, etc. They are characterized by the varying degrees of complexity and the range of use.

In geotechnical practice, the simplest perfectly elastic-plastic soil model of Coulomb-Mohr is used very often for calculations, but having several disadvantages. Hardening Soil Model is an advanced nonlinear soil model which is versatile and suitable for modeling a wide range of soil bases. The features of the model include the use of a nonlinear relationship between strains and stresses, the separation of shear and bulk components of deformation, a separate trajectory of deformation during unloading-reloading, the dependence of deformation characteristics on the level of stresses at the base, etc. However, the large number of input parameters, which are not verified by some regulations, makes it difficult to use.

The influence on the magnitude and nature of the distribution of the stress-strain state of underground structures using the Hardening Soil model with the corrected parameters obtained using empirical formulas is analyzed.

Also the question is relevant regarding the usage of the Coulomb-Mohr method with the extension of the methods (different options for deformation of the module with depth, using  $E_{ur}$  deformation module during loading and reloading), it may be possible to reduce the number of inaccessible issues in order to inflict on the deformed condition of underground structures.

**Keywords:** underground structure, finite element method (FEM), Coulomb-Mohr model, Hardening Soil model, stress-strain station (SSS).

*Солодей І.І., Петренко Э.Ю., Затылюк Г.А.*

### **ИССЛЕДОВАНИЕ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ПОДЗЕМНЫХ СООРУЖЕНИЙ НА ОСНОВЕ ГРУНТОВЫХ МОДЕЛЕЙ С КОРРЕКТИРОВАННЫМИ ВХОДНЫМИ ПАРАМЕТРАМИ**

Сегодня существует большое количество различных математических моделей почвы: Кулона-Мора, Hardening Soil Model и ее производные (Hardening Soil Small-strain), Soft Soil и ее производные, Cam-Clay тому подобное. Они характеризуются разной степенью сложности и диапазоном использования.

В геотехнической практике для проведения расчетов очень часто используется простейшая идеально упруго-пластическая грунтовая модель Кулона-Мора, которая имеет ряд недостатков. Hardening Soil Model – усовершенствованная нелинейная модель почвы, которая является достаточно универсальной и подходит для моделирования широкого диапазона грунтов оснований. К особенностям модели можно отнести использование нелинейной зависимости между деформациями и напряжениями, разделение сдвиговой и объемной составляющих деформаций, отдельная траектория деформаций при разгрузке-повторном нагружении, зависимость деформационных характеристик от уровня напряжений в основании и т.д. Однако, большое количество входных параметров, определение которых не регламентировано нормативными документами, затрудняет возможность ее использования.

Анализируется влияние на величину и характер распределения напряженно-деформированного состояния подземных сооружений при использовании модели Hardening Soil с корректированными параметрами, полученными с помощью эмпирических формул.

Также актуальным является вопрос возможности использования модели Кулона-Мора с использованием методик (различные варианты увеличения модуля деформации с глубиной, использование модуля деформации  $E_{ur}$  при разгрузке и повторном нагрузке), которые позволяют

уменьшить влияние недостатков этой модели на напряженно-деформированное состояние подземных сооружений.

**Ключевые слова:** подземное сооружение, метод конечных элементов (МКЭ), модель Кулона-Мора, Hardening Soil Model, напряженно-деформированное состояние (НДС).

УДК 539.3

*Солодей І.І., Петренко Е.Ю., Затилюк Г.А. Дослідження напружено-деформованого стану підземних споруд на основі ґрунтових моделей з корегованими вхідними параметрами // Опір матеріалів і теорія споруд: наук.-тех. збірн. – К.: КНУБА, 2019. – Вип. 103. – С. 63-70.*

*В статті дана оцінка можливості застосування ґрунтових моделей Hardening Soil Model та Кулона-Мора з корегованими вхідними параметрами, шляхом дослідження напружено-деформованого стану (НДС) підземних споруд.*

Іл. 3. Бібліогр. 7 назв.

UDC 539.3

*Solodei I.I., Petrenko E.Yu., Zatyliuk Gh.A. The stress-strain state investigation of underground structures on the basis of soil models with adjusted input parameters // Strength of Materials and Theory of Structures: Scientific-and-technical collected articles – Kyiv:KNUBA, 2019. – Issue 103. – P. 63-70.*

*The article evaluates the possibility of using Hardening Soil Model and Coulomb-Mohr soil models with corrected input parameters by investigating the stress-strain state (SSS) of underground structures.*

Fig. 3. Ref. 7.

УДК 539.3

*Солодей І.І., Петренко Э.Ю., Затилюк Г.А. Исследование напряженно-деформированного состояния подземных сооружений на основе ґрунтовых моделей с корректированными входными параметрами // Сопротивление материалов и теория сооружений: науч.-тех. сборн. – К.: КНУСА, 2019. - Вых. 103. – С. 63-70.*

*В статье дана оценка возможности применения ґрунтовых моделей Hardening Soil Model и Кулона-Мора с корректированными входными параметрами, путем исследования напряженно-деформированного состояния (НДС) подземных сооружений.*

Ил. 3. Библиогр. 7 назв.

**Автор:** доктор технічних наук, старший науковий співробітник, професор кафедри будівельної механіки СОЛОДЕЙ Іван Іванович

**Адреса робоча:** 03680 Україна, м. Київ, Повітрофлотський проспект 31, Київський національний університет будівництва і архітектури

**Робочий тел.:** +38 (044) 241-55-55

**Мобільний тел.:** +38 (050)357-44-90

**Імейл:** solodei.ii@knuba.edu.ua

**ORCID ID:** <https://orcid.org/0000-0001-7638-3085>

**Автор:** кандидат технічних наук, доцент, доцент кафедри геотехніки ПЕТРЕНКО Едуард Юрійович

**Адреса:** 03680 Україна, м. Київ, Повітрофлотський проспект 31, Київський національний університет будівництва і архітектури

**Імейл:** petrenko.eu@knuba.edu.ua

**ORCID ID:** <https://orcid.org/0000-0002-9792-4757>

**Автор:** аспірант, асистент кафедри будівельної механіки ЗАТИЛЮК Герман Анатолійович

**Адреса:** 03680 Україна, м. Київ, Повітрофлотський проспект 31, Київський національний університет будівництва і архітектури

**Мобільний тел.:** +38 (099) 11-00-564;

**Імейл:** zatyliuk.ha@knuba.edu.ua

UDC 539.3

**THE EFFICIENCY OF USING A SEMI-ANALYTICAL FINITE ELEMENTS METHOD IN GEOMETRICALLY NONLINEAR PROBLEMS OF ELASTIC-PLASTIC DEFORMATION****I.I. Solodei,**

Doctor of Engineering, Senior Researcher

**M.O. Vabishchevich,**

Candidate of Technical Sciences

**R.L. Stryhun***Kyiv National University of Construction and Architecture, Kyiv  
Povitroflotsky Ave., 31, Kyiv, 03680*

DOI: 10.32347/2410-2547.2019.103.71-81

The reliability and efficiency of the semi-analytic finite element method in the problems of geometrically nonlinear elastic-plastic deformation of axisymmetric structures under the influence of dynamic loads are considered. The possibilities of the technique are demonstrated on the examples of numerical simulation of the building structures' stress-strain state with large linear deformations and technological operation analysis of impulse metal processing.

**Keywords:** dynamics, geometric nonlinearity, plastic deformations, a solid of revolution, axisymmetric structures, semi-analytic finite element method (SAFEM).

**Introduction.** Among the variety of objects considered by analytical and numerical methods of particular interest are solid of revolution of complex shape and cross-sectional structure formed by the movement of some solid surface along a closed or disclosed broken line without breaks. The selected geometric class is used as a natural structure, nodes and components in the construction and various fields of mechanical engineering. Examples of facilities include water towers, chimneys, tanks for various purposes, nuclear reactor casings, various components and parts of power and transport engineering. The sufficiently high prevalence of these forms on the one hand, and the possibility of greatly simplifying the computational relationships based on their geometric features on the other, is attracting the increasing attention of researchers.

It is known that today the finite element method (FEM) is the most powerful tool for analyzing the problems of structural mechanics and deformation of a solid bodies. Over the last few years, the dimension of FEM models has increased dramatically, driven by increased requirements for the accuracy and reliability of results, prompting the use of more and more detailed calculation schemes. In addition, the difficulties of studying the behavior of structures in the presence of dynamic loads are increased in comparison with static analysis many times. To overcome these problems in many cases they introduce additional hypotheses, which, as a rule, narrow the class of objects and processes under study, but can significantly improve efficiency and significantly reduce the duration of the calculation. Semi-analytic finite element method (SAFEM) is such an approach that is widely used for solving problems which

objects are prismatic and solids of revolutionary of complex shape and cross-sectional structure. High efficiency of SAFEM for a certain range of objects has been demonstrated in the field of static and dynamic [2] analysis, continuous fracture mechanics under creep conditions [1], processes of nonlinear deformation of reinforced concrete structures [3]. The analysis of the results on this issue obtained by domestic and foreign scientists shows that most analytical and numerical methods of scientific research are usually oriented to geometrically nonlinear problems at static load [5, 12, 13]. Aspects of solving problems of dynamic deformation of axisymmetric solids with significantly expressed nonlinear mechanical characteristics, taking into account geometric nonlinearity and conditions of contact interaction are considered in the works of the authors [4, 10, 11]. The purpose of this work is to analyze the calculation results reliability of the specified classes of problems on the basis of the constructed approach and study of complex technological processes.

### 1. Analysis of the reliability of calculation results based on test examples

An important task of designing the shell of the electromagnetic drive is the correct determination of the thickness of the cylindrical screen wall, the value of which depends on its strength. At the same time, the thickness of the wall determines the magnitude of the magnetic gap, in proportion to the square of which the power of the magnetic drive falls. In this regard the importance of the task of reducing the thickness of the shell wall becomes clear. As shown by experimental studies, the use of a two-layer shell allows to increase the strength of the structure compared to all-metal one. Thus, in the first case, the magnitude of the breaking load is 10MPa, and in the second - 8MPa. In Fig.1 shown the calculation scheme and the results of numerical calculation in the form of displacements, depending on the intensity of the internal pressure in the linear calculation and taking into account the material fluidity.

The problem of deposition of a cylindrical workpiece in the cold state between two rigid plates is considered. The workpiece is a cylinder height 1.9m, diameter 2.38m. The material is elastic-plastically reinforced.

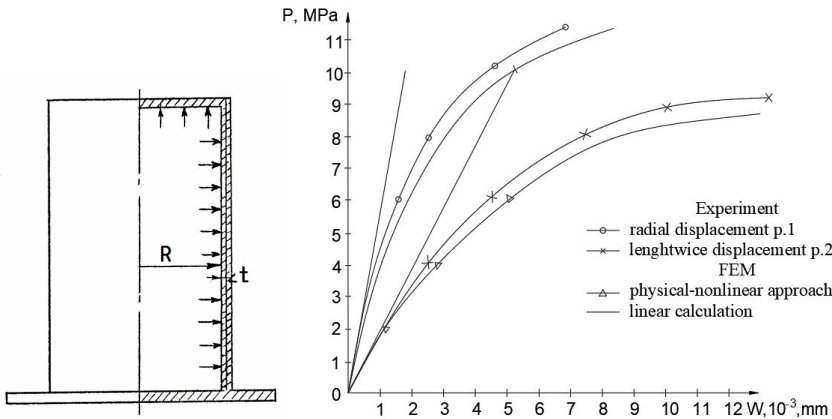


Fig. 1. The calculation scheme and the results of the numerical calculation of the electromagnetic drive shell



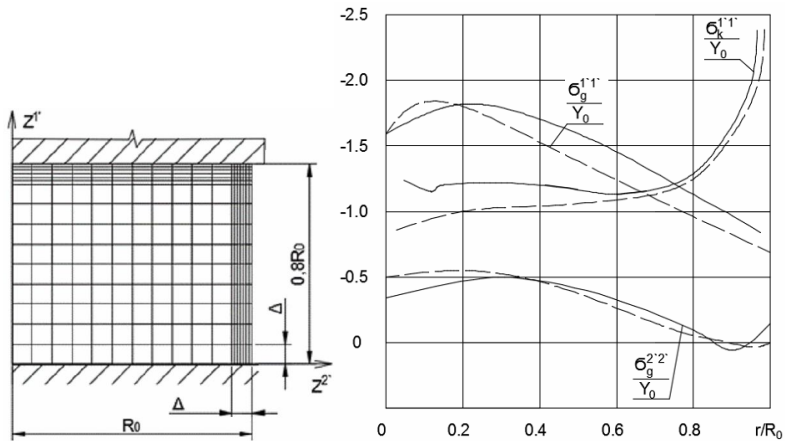


Fig. 2. The design scheme of the cylindrical workpiece and the graph of the distribution of axial and tangential stresses

A full adhesion is provided at the interface between the tool and the workpiece. The process of deposition of the cylindrical workpiece was performed to a degree of precipitation of 10%. The calculation scheme of the object and the results of the calculation in the form of graphs of the distribution of axial and tangential stresses in the equatorial plane are shown in Fig. 2. The tangent stresses coincide quite well, the discrepancy is observed only at points lying on the axis of symmetry. The plot of normal stresses on the surface of contact with the tool also conforms well with the results given in [9].

**2. The investigation of the deformation process of monolithic reinforced concrete chimney under the influence of wind load**

An example of calculating a reinforced concrete chimney (Fig. 1) with height  $H = 120\text{m}$ , loaded with its own weight and wind pressure was considered, which was considered as normal static pressure applied to the outer surface of the object.

The design scheme is a conical shell of variable thickness (Fig. 3(a)), which takes into account a vertical roll of magnitude 0.01 from the height of the structure. The normative value of the average wind load was calculated by the known formula  $w_m = w_0kc$ , where  $k$  is the altitude coefficient,  $c$  is the aerodynamic coefficient for the cylindrical surface and 0.23 kPa was adopted. The distribution of wind pressure is shown in Fig. 3(b).

The results of the calculation of the

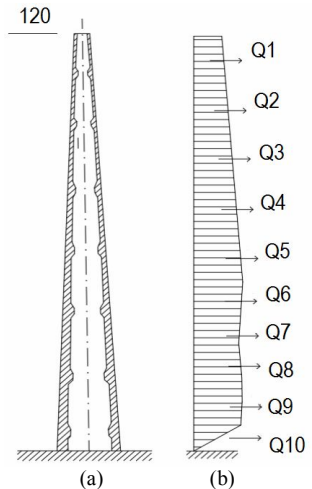


Fig. 3. General view of the pipe (a) and the diagram of the distribution of wind pressure (b)

stress-strain state of the structure are shown in the form of graphs in Fig. 4(a) and 4(b).

The obtained data show an increase of the expected results by 20% for the meridional stresses, and for the radial displacements - almost twice taking into account the geometric nonlinearity in comparison with the linear calculation.

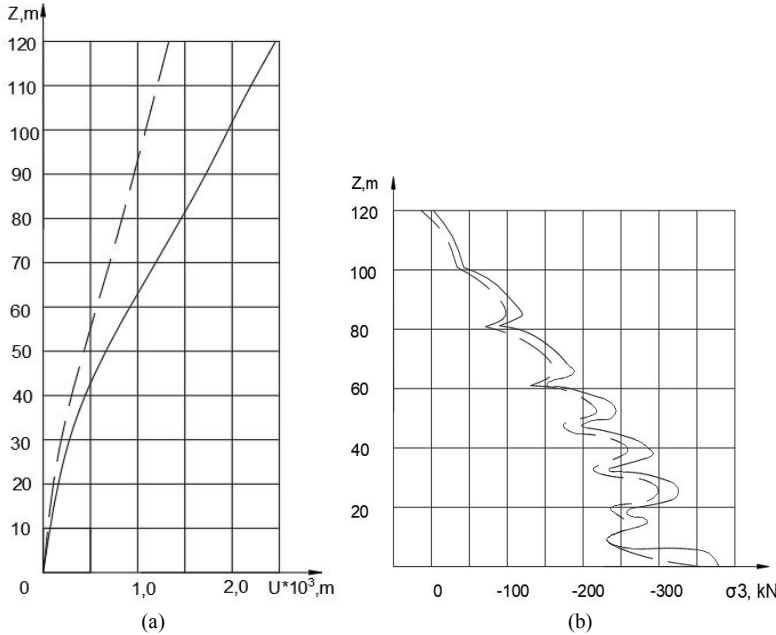


Fig. 4. Graphs of radial displacements  $U$  (a) and meridional stresses  $\sigma_3$  (b). The dashed line corresponds to the consideration of the problem in a linear formulation, solid - in a geometrically nonlinear

### 3. Applied tasks of numerical modeling of technological operations of impulse metal processing

The possibilities of the developed methodology are demonstrated by the examples of numerical study of technological operation of impulse metal processing. The problems are solved in an axisymmetric formulation taking into account the physical and geometric nonlinearity, contact interaction and the boundary state of the material. In modeling of separate operations, the phenomenological theory of Kolmogorov destruction is used to estimate the boundary condition, which is a model of accumulation of metal damage during its plastic deformation [8]. The condition of destruction is determined achieve

by the level of damage function  $H = \int_0^{\varepsilon_i^p} \frac{d\varepsilon_i^p}{\widehat{\varepsilon}_i^p(\gamma)} = 1$ . Here  $d\varepsilon_i^p$  - the intensity of

plastic deformation growth,  $\varepsilon_i^p$  - the intensity of accumulated plastic deformation,  $\widehat{\varepsilon}_i^p(\gamma)$  - the marginal intensity of plastic deformation at the time

of fracture, which is determined by the experimental deformation diagrams for each specific material.

It's considered the problem of forming a flange at the end of a tubular workpiece at its opening by an internal pressure impulse. The design scheme of the flange forming process is a cross-section of the pipe in the plane of formation, the external pressure  $P(t)$ , as a function of time  $t$  is also presented in Fig. 5. The physical and mechanical properties of the materials are as follows: modulus of elasticity  $E = 6.8 \times 10^4$  MPa, Poisson's ratio  $\nu = 0.3$ , material density  $\rho = 2.64 \times 10^3$  kg/m<sup>3</sup>, limit of yield  $\sigma_s = 182$  MPa, confidence interval (CI) for the power law of state  $\sigma = k \times \varepsilon^n$ , taking into account plastic flow with isotropic hardening, is:  $k = 374 \div 433$  MPa,  $n = 0.118 \div 0.177$ , marginal intensity of the deformation at the time of destruction  $\tilde{\varepsilon}_f^p = 0.69$ .

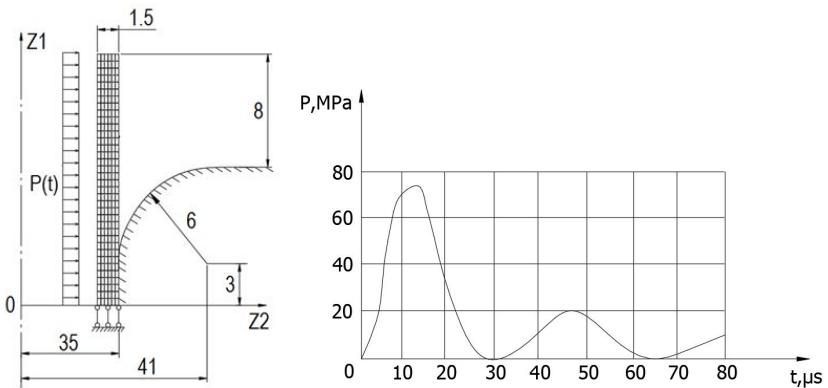


Fig. 5. Calculation scheme of flange formation at the end of the tubular workpiece

The results of the calculation (Fig. 6) showed that the model of ideally plastic material does not give sufficiently reliable results, so for the considered processes and materials, it is necessary to use more complex state laws that take into account the strengthening. It is seen that the experimental curves [6] lie in the region bounded by the two calculated curves obtained for given limit values of the parameters of the strengthening  $k$ . At  $k = 433$  MPa and  $n = 0.177$  there is a qualitative and quantitative convergence of calculation results and experimental data.

Two technological circuits of separation operations are considered: cutting and end-of-pipe method at compression field impulse by force. Cutting technology (Fig. 7(a)) involves the formation of annular waste in the area of free deformation between the two cutting edges. The process of milling (Fig. 7(b)) is technologically different from cutting with the absence of the second cutting edge and the presence of a longer free end part. The model of isotropic hardening is adopted according to the power law  $\sigma = k \times \varepsilon^n$  at the values of the hardening parameters  $k = 433$  MPa and  $n = 0.177$ .

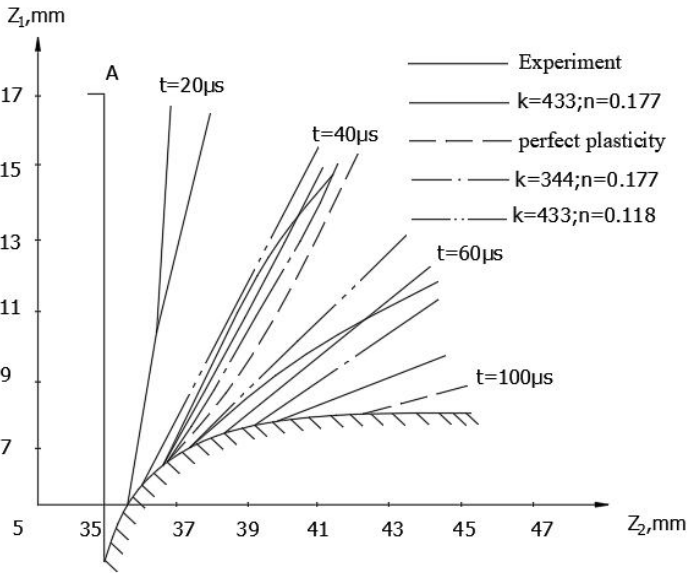


Fig. 6. Time external configuration of the workpiece surface

In Fig. 8 the graphs of changes in the intensity of the external pressure and the configuration of the workpiece in the deformation process are presented. As we can see, for both schemes of separation operations, the process of separation of the workpiece is completed by the time of reaching the maximum load applied. At the same time in the problem of end face, the movement of the free end part at a sufficient distance from the cutting edge (about half the length of end face) occurs almost parallel to the initial position of the face.

The same effect is observed in the initial stage of the flange forming process, which does not fully correspond to the experimental data. This discrepancy is due to the presence in the actual processes of boundary effects of force field pressure, which are not taken into account in the calculations.

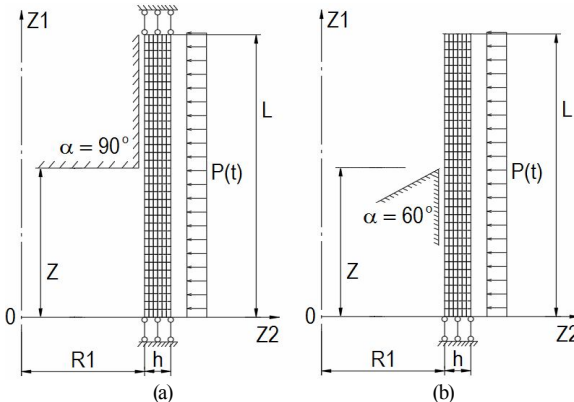


Fig. 7. Models of cutting (a) and end face (b) of cavity parts

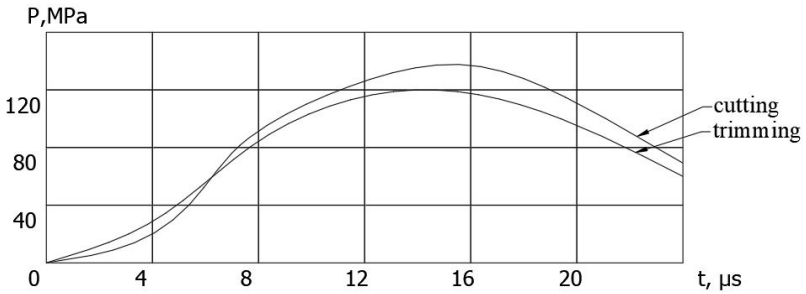


Fig. 8. Schedule of change of intensity of external pressure

It is significant that the distribution of plastic deformations in the thickness of the workpiece is significantly uneven. As a result, the development of fracture zones is quite complex. For example, in the process of cutting (Fig. 9) the initial zone of destruction reaches half the thickness of the workpiece for the time 19 - 20.7  $\mu\text{s}$ . Then, at the time of 20.9  $\mu\text{s}$  a small zone of destruction appears on the opposite edge of the cutting surface of the workpiece, after which the development of the initial zone continues, and by the time of 22.1  $\mu\text{s}$  the process of cutting ends. At the same time, near the cutting edge, the greatest contribution to the intensity of the accumulated plastic deformations is made by shear deformations, the value of which is twice as much as the relative elongations, while near the opposite surface of the shear deformation by 2 - 3 orders of magnitude below the relative elongations.

Thus, from the side of the cutting edge there is a shear failure, and on the opposite surface - due to stretching.

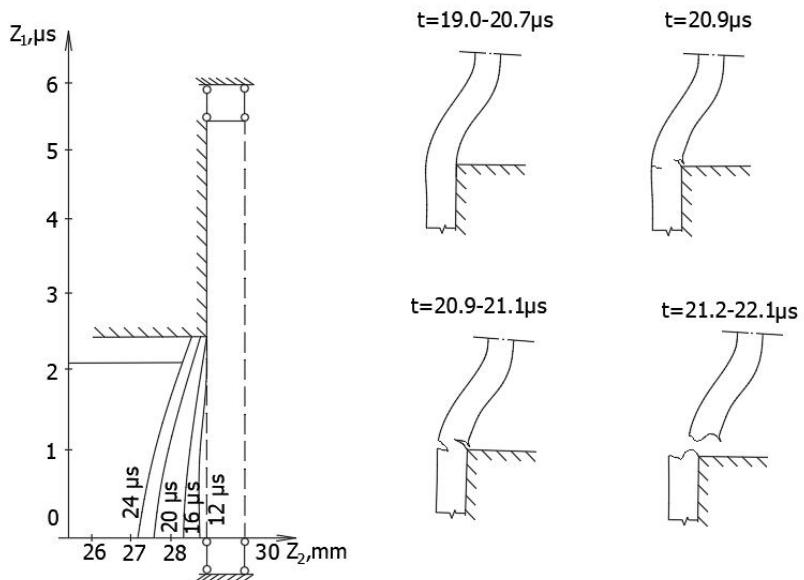


Fig. 9. Crimping

In the problem of end face crimping (Fig. 10), initially at  $t = 17.4 - 17.8 \mu\text{s}$  there is also a slight undercutting of the material by the cutting edge due to shear deformations.

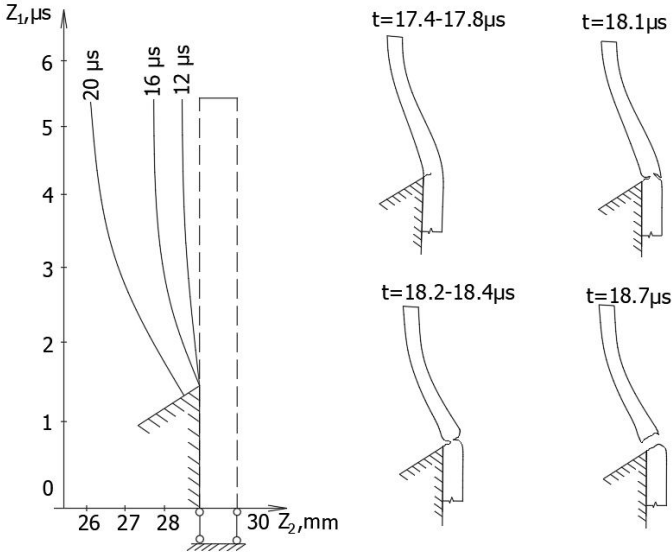


Fig. 10. Compression molding

Then the main zone of destruction is developed on the opposite side of the workpiece due to stretching. By the time  $t = 18.1 - 18.7 \mu\text{s}$ , trimming process is complete.

**Conclusion.** Within the framework of the proposed methodology a demonstration of the possibilities of the approach is made on the basis of the semi-analytic variant of the finite element method. Numerical studies have shown a significant influence of geometrical nonlinearity on determining the displacements of the top of a monolithic reinforced concrete pipe. Analyzing the results of studies of technological operations of impulse metal processing, it can be argued that in the separation operations the destruction of the workpiece when cutting is mainly due to shear deformation, scilicet there is a fracture of the cut, while the workpiece partitioning at the expense of tensile, that is tear fracture. On this basis, the largest elongation criterion of Mariotte [7], which is commonly used in calculations, give accurate results only for numerical modeling of face processes. To solve cutting problems, the Kolmogorov criterion is required, but, as the nature of plastic deformation shows, the dependence of the parameters on the type of stress state must be taken into account.

#### REFERENCES

1. *Bazhenov V.A.* Napivanalitichnyy metod skinchenykh elementiv v zadachakh ruynuvannya prostovykh til (Semi-analytic method of finite elements in problems of destruction of ordinary solids) / [Bazhenov V.A., Hulyar O.I., Pyskunov S.O., Sakharov O.S.] – K., KNUBA, 2005. – 298 p.

2. *Bazhenov V.A.* Napivanalitichnyy metod skinchennykh elementiv v zadachakh dynamiky prostorovykh til (Semi-analytic method of finite elements in problems of dynamics of spatial solids) / [Bazhenov V.A., Hulyar O.I., Sakharov O.S., Soloday I.I.] – K., KNUBA, 2012. - 248 p.
3. *Bazhenov V.A.* Chislennoye modelirovaniye razrusheniya zhelezobetonnykh konstruksiy po metodu konechnykh elementov (Numerical modeling of the destruction of reinforced concrete structures using the finite element method) / [Bazhenov V.A., Gulyar A.I., Kozak A.L., Rutkovskiy V.A., Sakharov A.S.] – K., Naukova dumka, 1996. – 360 p.
4. *Bazhenov V.A.* Postanovka evolyutsiynoy heometrychno-neliniynoy zadachi mekhaniky ruynuvannya dlya prostorovykh til obertannya ta pryzmatychnykh til (Formulation of an evolutionary geometric-nonlinear problem of fracture mechanics for spatial rotational bodies and prismatic solids ) / [Bazhenov V.A., Soloday I.I., Vabishchevych M.O., Stryhun R.L.] // Opir materialiv i teoriya sporud. (Strength of Materials and Theory of Structures) – K.: KNUBA, Vip.101, 2018, pp. 3-13
5. *Galishin A.Z.* Opredeleniye osesimmetrichnogo geometricheski nelineynogo termovyzkouprugoplasticheskogo sostoyaniya tonkikh sloistykh obolochek s uchedom povrezhdayemosti materiala (Determination of the axisymmetric geometrically nonlinear thermoviscoelastic state of thin layered shells taking into account damage to the material) / [Galishin A.Z., Shevchenko YU.M.] // Matematichni metodi ta fiziko-mekhanichni polya (Mathematical methods and physical-mechanical fields). – 2016. – t.51, No. 2. - S. 175–187.
6. *Hlushchenkov V.A.* Chyselne doslidzhennya protsesiv vysokoshvydkisnoho deformuvannya na osnovi metodu skinchennykh elementiv (Numerical study of high-speed deformation processes based on finite element method) / [Hlushchenkov V.A. etc.] // Mashynovedenye. 1986. №4. P.146-151.
7. *Kachanov L.M.* Osnovy mekhaniky ruynuvannya (Fundamentals of fracture mechanics) / [Kachanov L.M.] – M. Nauka. 1974.-312p.
8. *Kolmogorov V.L.* Mekhanika obrabotki metallov davleniyem (The mechanics of metal processing) / [Kolmogorov V.L.] – M.: Metallurgiya, 1986. – 688 p.
9. *Li/Lee E.H.* Analiz osesimmetrichnoy osadki i poperechnoy osadki v usloviyakh ploskoy deformatsii sploshnykh tsilindricheskikh zagotovok metodom konechnykh elementov (Analysis of axisymmetric upsetting and transverse upsetting under conditions of plane deformation of continuous cylindrical billets by the finite element method) / [E.H. Lee, S. Kobayashi] // ASME, ser. B, - 1971. No. 2 - c. 73-84.
10. *Maksym'yuk YU.V.* Vykhidni spivvidnoshennya neliniynoho dynamichnoho formozminennya visesymetrychnykh ta ploskodeformivnykh til (Initial relations of nonlinear dynamic shape change of axisymmetric and plane-deformable solids) / [Maksym'yuk YU.V., Soloday I.I., Stryhun R.L.] // Opir materialiv i teoriya sporud.(Strength of Materials and Theory of Structures) – K.: KNUBA, Vip. 102, 2019, pp. 252-262.
11. *Soloday I.I.* Skinchennoelementni modeli prostorovykh til v zadachakh dynamiky z urakhuvannam velykykh plastychnykh deformatsiy (Finite element models of spatial solids in dynamics problems with consideration of large plastic deformations)/ [Soloday I.I., Vabishchevych M.O., Stryhun R.L.]// Upravlinnya rozvytkom skladnykh system (Management of development of complex systems). –K .: KNUBA, Vol.39, 2019.-p.151-156.
12. *Chernyshenko I.S.* Fizicheski i geometricheski nelineynoye deformirovaniye konicheskikh obolochek ellipticheskim otverstiyem (Physically and geometrically nonlinear deformation of conical shells by an elliptical hole) / [Chernyshenko I.S., Storozhuk Ye.A., Kharenko S.B.] // Prikl. mekhanika. – 2008. – t.44, № 2. – S. 68–85.
13. *Galishin A.Z.* Axisymmetric physically nonlinear state of orthotropic shells / [Galishin A.Z., Shevchenko Yu.N.]// International Applied Mechanics, 2013.

*Solodei I.I., Vabishchevich M.O., Stryhun R.L.*

### **SEMIANALYTICAL FINITE ELEMENTS METHOD EFFICIENCY IN THE GEOMETRICALLY NONLINEAR ELASTIC-PLASTIC PROBLEMS**

Particular interest, among the variety of objects considered using analytical and numerical methods, are bodies of revolution with complex shape and cross-sectional structure. The selected geometric class is used as natural structure components in the construction and various fields of mechanical engineering. The sufficiently high prevalence of these forms in the construction and machine-building sectors on the one hand, and the possibility of a significant simplification math equations by taking into account their geometric features on the other, is attracting increasing attention of researchers.

It is known that today the finite element method (FEM) is the most powerful tool for analyzing the problems of building mechanics and deformable solid mechanics. Over the past few years, the dimension of FEM models has grown dramatically, driven by increased demands for accuracy and reliability of results. In addition, the difficulties of studying the behavior of structures in the presence of dynamic loads are many times increased in comparison with static analysis. To overcome these problems, in many cases, it introduce additional hypotheses, which, as a rule, narrow the class of objects and processes under study, but can significantly improve efficiency and significantly reduce the duration of the calculation. Semi-analytical finite element method (SAFEM) is one of such approaches that is widely used for solving problems whose objects are prismatic and rotational bodies. High efficiency of SAFEM for a certain range of objects was demonstrated in the field of static analysis, continuous mechanics of fracture under creep conditions, processes of nonlinear deformation of reinforced concrete structures. The analysis of the results obtained by domestic and foreign scientists on this issue shows that most analytical and numerical methods of scientific research are usually oriented to geometrically nonlinear problems at static load. The veracity and effectiveness of the semi-analytical finite element method in the problems of geometrically nonlinear elastoplastic deformation of axisymmetric structures under dynamic loads is considered. The capabilities of methodology are demonstrated by examples of numerical modeling of the stress-strain state of building structures with large linear strains and analysis of technological processes of pulsed metal processing.

**Keywords:** dynamics, geometric nonlinearity, plastic deformations, bodies of revolution, axisymmetric constructions, semi-analytical finite element method.

*Солодей И.И., Вабищевич М.О., Стригун Р.Л.*

### **ЭФФЕКТИВНОСТЬ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ПОЛУАНАЛИТИЧЕСКОГО МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ В ГЕОМЕТРИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧАХ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ**

Рассмотрена достоверность и эффективность полуаналитического метода конечных элементов в задачах геометрически нелинейного упругопластического деформирования осесимметричных конструкций под действием динамических нагрузок. Возможности методики демонстрируются на примерах численного моделирования напряженно-деформированного состояния строительных конструкций при больших линейных деформациях и анализа технологических процессов импульсной обработки металлов.

**Ключевые слова:** динамика, геометрическая нелинейность, пластические деформации, тела вращения, осесимметричные конструкции, полуаналитического метод конечных элементов.

УДК 539.3

*Солодей И.И., Вабищевич М.О., Стригун Р.Л.* **Ефективність використання напіваналітичного методу скінченних елементів в геометрично нелінійних задачах пружно-пластичного деформування** // Опір матеріалів і теорія споруд: наук.-тех. збірн. – К.: КНУБА, 2019. – Вип. 103. – С. 71-81.

*Розглянута достовірність та ефективність застосування напіваналітичного методу скінченних елементів в задачах геометрично нелінійного пружнопластичного деформування вісесиметричних конструкцій під дією динамічних навантажень. Можливості методики демонструються на прикладах чисельного моделювання напружено-деформованого стану будівельних конструкцій при великих лінійних деформаціях та аналізу технологічних процесів імпульсної обробки металів.*

Лл. 9. Бібліогр. 13 назв.



UDC 539.3

*Solodei I.I., Vabishchevich M.O., Stryhun R.L. Semianalytical finite elements method efficiency in the geometrically nonlinear elastic-plastic problems // Strength of Materials and Theory of Structures: Scientific-and-technical collected articles – Kyiv: KNUBA, 2019. – Issue 103. – P. 71-81.*

*The veracity and effectiveness of the semi-analytical finite element method in the problems of geometrically nonlinear elastoplastic deformation of axisymmetric structures under dynamic loads is considered. The capabilities of methodology are demonstrated by examples of numerical modeling of the stress-strain state of building structures with large linear strains and analysis of technological processes of pulsed metal processing.*

Fig. 9. Ref. 13.

УДК 539.3

*Солодей І.І., Вабищевич М.О., Стригун Р.Л. Эффективность использования полуаналитического метода конечных элементов в геометрически нелинейных задачах упругопластического деформирования // Сопротивление материалов и теория сооружений: науч.-тех. сборн. – К.: КНУСА, 2019. - Вып. 103. - С. 71-81.*

*Рассмотрена достоверность и эффективность полуаналитического метода конечных элементов в задачах геометрически нелинейного упругопластического деформирования осесимметричных конструкций под действием динамических нагрузок. Возможности методики демонстрируются на примерах численного моделирования напряженно-деформированного состояния строительных конструкций при больших линейных деформациях и анализа технологических процессов импульсной обработки металлов.*

Ил. 9. Библиогр. 13 назв.

**Автор:** доктор технічних наук, старший науковий співробітник, професор кафедри

будівельної механіки КНУБА Солодей Іван Іванович

**Адреса робоча:** 03680 Україна, м. Київ, Повітрофлотський пр. 31, Київський національний університет будівництва і архітектури

**Робочий тел.:** +38(044) 241-55-55

**Мобільний тел.:** +38(050) 357-44-90

**Імейл:** solodei.ii@knuba.edu.ua

**ORCID ID:** <http://orcid.org/0000-0001-7638-3085>

**Автор:** кандидат технічних наук, доцент кафедри будівельної механіки КНУБА

Вабищевич Максим Олегович

**Адреса робоча:** 03680 Україна, м. Київ, Повітрофлотський пр. 31, Київський національний університет будівництва і архітектури

**Робочий тел.:** +38(044) 241-55-55

**Мобільний тел.:** +38(050)928-40-97

**Імейл:** vabischevych.mo@knuba.edu.ua

**ORCID ID:** <http://orcid.org/0000-0002-0755-5186>

**Автор:** асистент кафедри будівельної механіки КНУБА Стригун Руслан Леонідович

**Адреса робоча:** 03680 Україна, м. Київ, Повітрофлотський пр. 31, Київський національний університет будівництва і архітектури

**Робочий тел.:** +38(044) 241-55-55

**Мобільний тел.:** +38(068) 790-56-51

**Імейл:** stryhun.rl@knuba.edu.ua

**ORCID ID:** <http://orcid.org/0000-0002-1174-5310>

UDC 624.014

## SEARCHING FOR SHEAR FORCES FLOWS IN ARBITRARY CROSS-SECTIONS OF THIN-WALLED BARS: NUMERICAL ALGORITHM AND SOFTWARE IMPLEMENTATION

V.V. Yurchenko,

Cand. Of Tech. Sc., Assoc. Prof.

*Kyiv National University of Construction and Architecture  
Povitroflotskyj av., 31, Kyiv, 03680*

DOI: 10.32347/2410-2547.2019.103.82-111

The problem of shear stresses outside longitudinal edges of an arbitrary cross-section (including open-closed multi-contour cross-sections) of a thin-walled bar subjected to the general load case has been considered in the paper. The formulated problem has been reduced to the searching problem for unknown shear forces flows that have the least value of the Castigliano's functional. Besides, constraints-equalities of shear forces flows equilibrium formulated for cross-section branch points, as well as equilibrium equation formulated for the whole cross-section relating to longitudinal axes of the thin-walled bar have been taken into account.

A detailed numerical algorithm intended to solve the formulated problem has been proposed by the paper. Developed algorithm has been implemented in SCAD Office environment by the program TONUS. Numerical examples for calculation of thin-walled bars with open and open-closed multi-contour cross-sections have been considered in order to validate developed algorithm and verify calculation accuracy for sectorial cross-section geometrical properties and shear stresses caused by warping torque and shear forces.

**Keywords:** thin-walled bar, arbitrary cross-section, shear forces flow, closed contour, graph theory, Castigliano's functional, mathematical programming task, method of Lagrange multipliers, algorithm, software implementation

**Introduction.** To provide desired stiffness and strength in torsion bridge superstructures are often constructed with a cross-section consisting of multiple cells which have thin walls relative to their overall dimensions. When the cross-section contains multiple cells they all contribute resistance to applied torsion and for elastic continuity each cell must twist the same amount. With these considerations, equilibrium and compatibility conditions allow simultaneous equations to be formed and solved to determine the shear flow for each cell [1].

R.K. Dowell and T.P. Johnson proposed a relaxation method that distributes incremental shear flows back and forth between cells, reducing errors with each distribution cycle, until the final shear flows for all cells approximate the correct values [1]. In this paper, a closed-form approach has been introduced to determine, exactly, both the torsional constant and all shear flows for multi-cell cross-sections under torsion.

The problem of shear stresses determination for thin-walled bars has been also studied by V. Slivker in [2, 3] for the general loading case. His semi-sheared theory has been applied by Lalin V.V. et al. [4] for the stability problems of thin-walled bars.

Further investigations in this area require the development of a detailed algorithm intended to software implementation in a computer-aided design system for thin-walled bar structures [5]. Such algorithm can be validated

against benchmark examples as well as finite element results [6]. It is reasonable to construct this algorithm using the mathematical apparatus of the graph theory as it is convenient mathematical apparatus to describe the topological properties of multi-cellular cross-section.

The graph algorithm used in this paper is given first by Tarjan [7]. Its application in analysis of thin-walled multi-cellular section is described by Alfano et al. [8], but the distribution of torsion stresses due to a change in normal stresses has not been considered. The graph theory has been also applied in [9, 10] to calculate the geometrical cross-sectional properties of thin-walled bars with hybrid (open-closed) types of cross-sections.

Simple digital computer program has been created to evaluate the bending shear flow of any multiply-connected cellular sections has been developed by Chai H. Yoo et al. [11]. Prokić has developed a computer program for the determination of the torsional and flexural properties of thin-walled beams with arbitrary open-closed cross-section [12]. In his paper graph theory has been also applied to establish the topological properties of multi-cellular cross-section. Gurujee C.S. and Shah K.R. [13] presented a general purpose computer program capable of analyzing any planar frame made up of bar members which can be categorized as thin-walled structural members. G.K.Choudhary and K.M. Doshi proposed an algorithm for shear stress evaluation in ship hull girders [14].

Though many papers are written on behavior of thin-walled bars development of a general computer program for the design and verification of thin-walled bar structural members remains an actual task. Despite the prevailing influence of normal stresses on the stress-strain state of thin-walled bars design and verification of thin-walled structural members should be performed taking into account not only normal stresses, but also shear stresses. Therefore, in the paper a thin-walled bar of an arbitrary cross-section which is undergone to the general load case is considered as *investigated object*. The main *research question* is development of mathematical support and knoware for numerical solution for shear stresses problem with orientation on software implementation in a computer-aided design system for thin-walled bar structures.

**1. Problem formulation.** Let us consider the problem of shear stresses on longitudinal edges of an arbitrary section of a thin-walled bar that can consist of several closed (connected and/or disconnected) contours and/or also open parts. Let us introduce on the plane of thin-walled cross-section a Cartesian coordinate system  $y_c O z_c$  with the origin in the center of mass  $C$  of the section, the direction of the coordinate system axes  $y_c O z_c$  coincides with the direction of principle axes of inertia. Let us also introduce on the plane of thin-walled cross-section a Cartesian coordinate system  $y_s O z_s$  with the origin in the shear center  $S$  of the section, the direction of the coordinate system axes  $y_s O z_s$  coincides with the direction of principle axes of inertia (Fig. 1).

Let us introduce in further consideration the system of angular position coordinate with the origin in certain (generally randomly selected) sectional point. Each considered sectional point can be associated with the angular position  $\zeta$ . The value  $\zeta$  should be calculated as the geometrical length of the

curve constructed from the origin to the considered sectional point taken along the sectional contour. We also assume that the increment of the angular position  $\zeta$  corresponds to the positive direction of section path tracing.

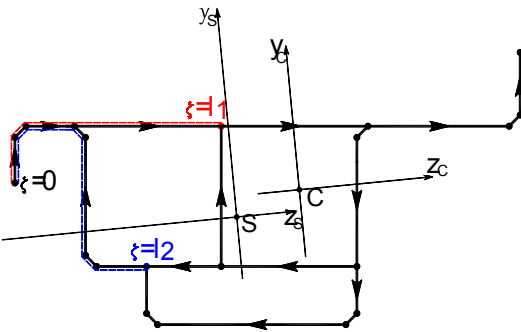


Fig. 1. Cross-section of a thin-walled bar with representation of different angular positions as examples

We assume that the integral geometrical properties of the section are known:  $A$  is the cross-sectional area,  $I_y$  and  $I_z$  are the second moments of area relative to the main axes of inertia which coincide with axes of global Cartesian coordinate system  $y_c O z_c$ ;  $I_\omega$  is the sectorial moment of inertia;  $I_t$  is the second moment of area for pure torsion. We

also assume that the Young’s modulus  $E$  and the shear modulus  $G$  are constants for the whole cross-section of the thin-walled bar.

Generally, a thin-walled bar is subjected to the action of eight force factors. Axial force  $N$ , bending moments  $M_y$  and  $M_z$  relative to the principle axes of inertia and warping bimoment  $B$  are applied at the center of mass  $C$  (see Fig. 1) of the section and cause normal stresses in the cross-section  $\sigma_i(x, \zeta)$ :

$$\sigma_i(x, \zeta) = \frac{N(x)}{A} + \frac{M_y(x)}{I_y} z_i(\zeta) + \frac{M_z(x)}{I_z} y_i(\zeta) + \frac{B(x)}{I_\omega} \varpi_i(\zeta), \tag{1.1}$$

where  $y_i(\zeta)$ ,  $z_i(\zeta)$ ,  $\varpi_i(\zeta)$  are coordinates and sectorial coordinate of the considered point in cross-section of a thin-walled bar.

Shear forces  $Q_y$  and  $Q_z$ , total torque  $M_x$  and warping torque  $M_\omega$  are applied at the shear center  $S$  (see Fig. 1) of the cross-section and cause shear stresses in the cross-section, which can be written in terms of shear forces flows  $T_j(x, \zeta)$  as presented below:

$$\tau_j(x, \zeta) = \frac{T_j(x, \zeta)}{\delta_j(\zeta)}, \tag{1.2}$$

where  $\delta_j(\zeta)$  is the thickness of considered  $j^{\text{th}}$  section element.

An arbitrary section of a thin-walled bar can be described by the set of sectional points  $\mathbf{P} = \{ \vec{p}_p = \{ y_p, z_p \} \mid p = \overline{1, n_p} \}$  ( $y_p$  and  $z_p$  are the coordinates of  $p^{\text{th}}$  sectional point in the global Cartesian coordinate system  $y_c O z_c$ ) and by the set of sectional segments  $\mathbf{S} = \{ \vec{s}_s = \{ p_s^{st}, p_s^{end} \} \mid s = \overline{1, n_s} \}$ , which connect



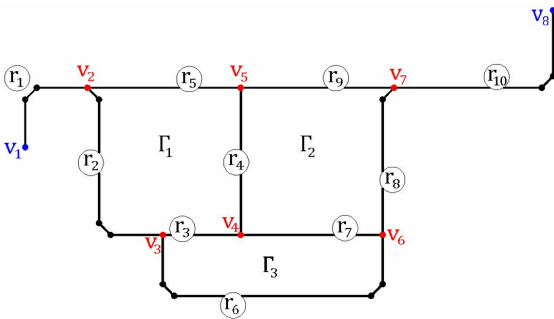


Fig 3. Graph  $G$  associated with cross-section of thin-walled bar ( $v_2 \dots v_7$  – branch points,  $v_1, v_8$  – end points)

Herewith, for each graph edge  $r = \{u, v\} \in R$  we assume that  $u \neq v$ .

The vertices of the graph  $G$  are associated with characteristic sectional points only, which can be either:

1) branch points are sectional points connected with more than two sectional

segments,  $v^p = \{\vec{p}_v \mid v = \overline{1, n_v}\}$ , here  $n_v$  is the number of these points;

2) end points are sectional points connected with only one sectional segment  $v^p_{end} = \{\vec{p}_g \mid g = \overline{1, n_g}\}$ , here  $n_g$  is the number of these points.

The edges of the graph  $G$  are associated with sectional parts located between characteristic sectional points (with unbranched sectional parts). An edge of the graph  $G$ , as a rule, may contain several sectional segments, so the full information about edge  $R_j^S$  of the graph can be described by the set of sectional

segments  $\vec{s}_r^S, r = \overline{1, n_{r_{cj}}}$ , from the array  $S^S = \{\vec{s}_\kappa^S = \{\zeta_\kappa^{start}, \zeta_\kappa^{end}\} \mid \kappa = \overline{1, n_\zeta - 1}\}$ ,  $\vec{s}_r^S \in S^S$ , belonging to considered graph edge,  $\vec{s}_r^S \in R_j$ :  $R_j^S = \{\vec{s}_r^S : \vec{s}_r^S \in S^S \wedge \vec{s}_r^S \in R_j \mid r = \overline{1, n_{r_{cj}}}\}$ , here  $n_{r_{cj}}$  is the number of segments for  $j^{th}$  graph edge. The set of all the graph edges defined on the set of segments  $S^S$  can be expressed as  $R^S = \{R_j^S \mid j = \overline{1, n_r}\}$ .

We also assume that the arbitrary section of the thin-walled bar may contain some quantity of closed contours. Each closed contour is associated with a cycle of the graph  $G$  or with a vertices sequence  $v_0^k, v_1^k, v_2^k, \dots, v_n^k$ , such that  $v_i^k \mapsto v_{i+1}^k \forall i \Leftrightarrow \exists v_{i+1}^k$ , where  $n_k$  is the number of closed contours in the section (the number of the graph  $G$  cycles).

Some closed contour of a section  $\Gamma_k^{r^S}$  (a basic cycle of the graph  $G$ ) can be definitely determined by the set of the graph edges  $R_j^S \in R^S$  belonging to the considered contour  $\Gamma_k^{r^S} = \{R_j^S \mid j = \overline{1, n_{r_{c\Gamma_k}}}\}$ , where  $n_{r_{c\Gamma_k}}$  is the number of the graph edges belonging to  $k^{th}$  closed contour. Besides, it is convenient to have the mapping of the closed contour  $\Gamma_k^{r^S}$  onto the set of sectional segments  $\vec{s}_m^S, \vec{s}_m^S \in S^S$ , belonging to the considered closed contour,  $\forall m = \overline{1, n_{c\Gamma_k}}$ :

$\Gamma_k^\zeta = \left\{ \vec{s}_m^\zeta : \vec{s}_m^\zeta \in \mathbf{S}^\zeta, \exists \mathbf{R}_\alpha^\zeta \subseteq \mathbf{R}^\zeta : \vec{s}_m^\zeta \subseteq \mathbf{R}_\alpha^\zeta \wedge \mathbf{R}_\alpha^\zeta \subseteq \Gamma_k^{r\zeta} \right\}$ , here  $n_{\zeta\Gamma_k}$  is the number of the sectional segments belonging to  $k^{\text{th}}$  closed contour.

The closed contours (basic cycles of the graph  $\mathbf{G}^\zeta$ ) defined on the set of graph edges  $\mathbf{R}^\zeta$  and on the set of section segments  $\mathbf{S}^\zeta$  can be described as  $\Phi^{r\zeta} = \left\{ \Gamma_k^{r\zeta} \mid k = \overline{1, n_k} \right\}$  and  $\Phi^\zeta = \left\{ \Gamma_k^\zeta \mid k = \overline{1, n_k} \right\}$  accordingly. It should be noted that the identification of closed contours in the section  $\Phi^{r\zeta}$  and  $\Phi^\zeta$  can be easily implemented using depth-first search algorithms on the graph.

Let us compose an incidence matrix  $\mathbf{I}$  for the graph  $\mathbf{G}^\zeta$  with dimensions  $n_v \times n_r$ ,  $\mathbf{I} = \left\{ g_{ij} \mid i = \overline{1, n_v}, j = \overline{1, n_r} \right\}$ . The components of the matrix take the following values:  $g_{ij} = 1$ , if  $i^{\text{th}}$  graph vertex is a start vertex for  $j^{\text{th}}$  edge;  $g_{ij} = -1$ , if  $i^{\text{th}}$  graph vertex is an end vertex for  $j^{\text{th}}$  edge;  $g_{ij} = 0$ , otherwise. Let us also introduce a matrix  $|\mathbf{I}| = \left\{ |g_{ij}| \mid i = \overline{1, n_v}, j = \overline{1, n_r} \right\}$  composed of the modulus of elements  $g_{ij}$  of the matrix  $\mathbf{I}$ .

Next, we can compose a matrix of basic graph cycles  $\mathbf{F}$  with dimensions  $n_k \times n_r$ ,  $\mathbf{F} = \left\{ f_{kj} \right\}, k = \overline{1, n_k}, j = \overline{1, n_r}$ . The components of the matrix take the following values:  $f_{kj} = 1$ , if  $j^{\text{th}}$  graph edge belongs to  $k^{\text{th}}$  basic graph cycle ( $\mathbf{R}_j^\zeta \subseteq \Gamma_k^\zeta$ ) and the edge direction coincides with the positive direction of path tracing;  $f_{kj} = -1$ , if  $j^{\text{th}}$  graph edge belongs to  $k^{\text{th}}$  basic graph cycle ( $\mathbf{R}_j^\zeta \subseteq \Gamma_k^\zeta$ ) and the edge direction does not coincide with the positive direction of path tracing;  $f_{kj} = 0$ , if  $j^{\text{th}}$  graph edge does not belong to  $k^{\text{th}}$  basic graph cycle ( $\mathbf{R}_j^\zeta \cap \Gamma_k^\zeta = \emptyset$ ).

### 3. Resolving equations relating to distribution of shear forces flows taken along closed contours for an arbitrary section of a thin-walled bar.

Each  $j^{\text{th}}$  edge  $\mathbf{R}_j^\zeta$ ,  $j = \overline{1, n_r}$  of the graph  $\mathbf{G}^\zeta$  corresponds to a constant – edge weight,  $\forall \kappa : \vec{s}_\kappa^\zeta \in \mathbf{R}_j^\zeta \wedge \vec{s}_\kappa^\zeta \in \mathbf{S}^\zeta$ :

$$p_j = \int_{\ell_{vj}} \frac{d\zeta}{\delta(\zeta)} = \sum_{r=1}^{n_{\zeta rj}} \int_{\ell_\zeta \in \mathbf{R}_j^\zeta} \frac{d\zeta}{\delta(\zeta)} = \sum_{r=1}^{n_{\zeta rj}} \frac{1}{\delta_\kappa^\zeta} \int_{\zeta_\kappa}^{\zeta_{\kappa+1}} d\zeta = \sum_{r=1}^{n_{\zeta rj}} \frac{l_\kappa^\zeta}{\delta_\kappa^\zeta}. \quad (2.1)$$

Let us also compose the *weighting matrix of unbranched sectional parts* (edges of graph  $\mathbf{G}^\zeta$ ) – a square matrix  $\mathbf{W}$  with dimensions  $n_r \times n_r$  and diagonal elements  $p_j$ ,  $j = \overline{1, n_r}$ :

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} p_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & p_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & p_{n_r} \end{bmatrix}. \tag{2.2}$$

Besides, each  $j^{\text{th}}$  graph edge  $\mathbf{R}_j^\zeta$  corresponds to the increment of the sectorial coordinate  $\Delta\omega_{r,j}^\zeta = \left\{ \Delta\omega_{r,j}^\zeta \mid j = \overline{1, n_r} \right\}^T$ ,  $\forall k : \vec{s}_k^\zeta \in \mathbf{R}_j^\zeta \wedge \vec{s}_k^\zeta \in \mathbf{S}^\zeta$ :

$$\Delta\omega_{r,j}^\zeta = \int_{\ell_{rj}} \rho d\zeta = \int_{\ell_{rj}} d\omega = \sum_{r=1}^{n_{\sigma j}} \int_{\ell_\zeta \in \mathbf{R}_j^\zeta} d\omega = \sum_{r=1}^{n_{\sigma j}} \int_{\zeta_k}^{\zeta_{k+1}} d\omega = \sum_{r=1}^{n_{\sigma j}} \Delta\omega_{r,j}^\zeta. \tag{2.3}$$

Each closed contour of the section  $\Gamma_k^{r\zeta}$ ,  $k = \overline{1, n_k}$ , corresponds to the following constant – *contour weight*,  $f_{kj} \in \mathbf{F}$ ,  $\forall j : \mathbf{R}_j^\zeta \subseteq \Gamma_k^{r\zeta}$ :

$$\tilde{p}_k = \oint_{\Gamma_k^{r\zeta}} \frac{d\zeta}{\delta(\zeta)} = \int_{\mathbf{R}_j^\zeta \subseteq \Gamma_k^{r\zeta}} \frac{d\zeta}{\delta(\zeta)} = \sum_{j=1}^{n_{r\zeta k}} |f_{kj}| p_j. \tag{2.4}$$

Let us also introduce the *weighting matrix of sectional contours* – a square matrix  $\mathbf{K}$  with dimensions  $n_k \times n_k$ :

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \tilde{p}_{11} & -p_{12} & \dots & -p_{1k} & \dots & -p_{1n_k} \\ -p_{21} & \tilde{p}_{22} & \dots & -p_{2k} & \dots & -p_{2n_k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -p_{k1} & -p_{k2} & \dots & \tilde{p}_{kk} & \dots & -p_{kn_k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -p_{n_k 1} & -p_{n_k 2} & \dots & -p_{n_k k} & \dots & \tilde{p}_{n_k n_k} \end{bmatrix}, \tag{2.5}$$

here the diagonal elements of the matrix are the weights of  $k^{\text{th}}$  closed contour,  $\tilde{p}_{kk} = \tilde{p}_k$ ,  $k = \overline{1, n_k}$ ; other elements of the matrix  $p_{\alpha\beta}$  take zero value  $p_{\alpha\beta} = p_{\beta\alpha} = 0$ , when corresponded closed contours have no common edges:  $\Gamma_\alpha^\zeta \cap \Gamma_\beta^\zeta = \emptyset$ , and the sum of the weights for all common edges:

$$p_{\alpha\beta} = p_{\beta\alpha} = \sum_r p_r, \forall r : \mathbf{R}_r^\zeta \subseteq \Gamma_\alpha^\zeta \wedge \mathbf{R}_r^\zeta \subseteq \Gamma_\beta^\zeta.$$

Let us consider the problem of torsion for an arbitrary thin-walled section subjected to total torque  $M_x$  only. When the cross-section consists of certain number of closed (connected and/or disconnected) contours, as well as open parts, the torsion problem for the cross-section of the thin-walled bar is statically indeterminate. That is why not only static equations but also strain compatibility conditions must be introduced to consideration.

Let us formulate the strain compatibility conditions considering Castigliano’s functional. The latter can be identified with an expression for strain energy formulated in terms of stresses for an isotropic material [3]:



$$C = \frac{1}{2G} \left( \sum_{j=1}^{n_r} \left( \int_{\ell_j} \frac{(\sigma(\zeta))^2}{2(1+\nu)} \delta(\zeta) d\zeta + \int_{\ell_j} (\tau(\zeta))^2 \delta(\zeta) d\zeta \right) \right). \tag{2.6}$$

Besides, normal stresses  $\sigma(\zeta)$  can be omitted, as total torque acts only:

$$C = \frac{1}{2G} \left( \sum_{j=1}^{n_r} \int_{\ell_j} (\tau(\zeta))^2 \delta(\zeta) d\zeta \right). \tag{2.7}$$

Let us rewrite Castigliano's functional  $C$  (2.7) substituting shear stresses  $\tau(\zeta)$  by their representation in terms of contour flows  $\vec{T} = \{\tilde{T}_k\}^T, k = \overline{1, n_k}$ :

$$\tilde{v}_k(\zeta) = \frac{\tilde{T}_k(\zeta)}{\delta_k(\zeta)}, \tag{2.8}$$

In this case we obtain the following expression for Castigliano's functional:

$$C = \frac{\tilde{T}_1^2}{2G} \oint_{\Gamma_1} \frac{d\zeta}{\delta(\zeta)} + \frac{\tilde{T}_2^2}{2G} \oint_{\Gamma_2} \frac{d\zeta}{\delta(\zeta)} + \dots + \frac{\tilde{T}_k^2}{2G} \oint_{\Gamma_k} \frac{d\zeta}{\delta(\zeta)} - \frac{\tilde{T}_1 \tilde{T}_2}{G} \int_{\Gamma_{12}} \frac{d\zeta}{\delta(\zeta)} - \frac{\tilde{T}_1 \tilde{T}_3}{G} \int_{\Gamma_{13}} \frac{d\zeta}{\delta(\zeta)} - \dots$$

$$\dots - \frac{\tilde{T}_1 \tilde{T}_k}{G} \int_{\Gamma_{1k}} \frac{d\zeta}{\delta(\zeta)} - \frac{\tilde{T}_2 \tilde{T}_3}{G} \int_{\Gamma_{23}} \frac{d\zeta}{\delta(\zeta)} - \frac{\tilde{T}_2 \tilde{T}_4}{G} \int_{\Gamma_{24}} \frac{d\zeta}{\delta(\zeta)} - \dots - \frac{\tilde{T}_2 \tilde{T}_k}{G} \int_{\Gamma_{2k}} \frac{d\zeta}{\delta(\zeta)} - \dots$$

$$\dots - \frac{\tilde{T}_{k-1} \tilde{T}_k}{G} \int_{\Gamma_{k-1,k}} \frac{d\zeta}{\delta(\zeta)}. \tag{2.9}$$

Negative summands  $\frac{\tilde{T}_{k-1} \tilde{T}_k}{G} \int_{\Gamma_{k-1,k}} \frac{d\zeta}{\delta(\zeta)}$  in (2.9) take into account the mutual

work of the counter flows of shear stresses on the common parts of the thin-walled bar cross-section.

It is evident that the resulting torsional moment in the section caused by all contour flows of shear stresses  $\vec{T} = \{\tilde{T}_k\}^T, k = \overline{1, n_k}$  equals to the sum of the torsional moments caused by each of these flows [3]:

$$M_x = \sum_{k=1}^{n_k} \tilde{T}_k \Omega_k, \tag{2.10}$$

here  $\Omega_k$  is the double area embraced by  $k^{\text{th}}$  closed contour  $\Gamma_k^\zeta$  of the section.

Let us present the formulated problem in the form of a mathematical programming task, namely as a problem for unknown contour shear forces flows  $\vec{T} = \{\tilde{T}_k\}^T, k = \overline{1, n_k}$  that ensure the least value of the optimum criterion, i.e. Castigliano's functional  $C$  (2.9) subject to equilibrium condition (2.10).

Let us present the solution of the formulated problem as follow:

$$\tilde{T}_k = \tilde{a}_k \frac{M_x}{\Omega_0}, \tag{2.11}$$

where  $\Omega_0$  is the double area for all closed contours of the section  $\Phi^s$ ,

$\Omega_0 = \sum_{k=1}^{n_k} \Omega_k$ ;  $\tilde{a}_k$  is the factor for the distribution of shear forces flows along  $k^{\text{th}}$  closed contour. Then Castigliano's functional (2.9) can be rewritten as presented below:

$$\begin{aligned}
 C = & \frac{M_x^2}{2G\Omega_0^2} \left( \tilde{a}_1^2 \oint_{\Gamma_1} \frac{d\zeta}{\delta(\zeta)} + \tilde{a}_2^2 \oint_{\Gamma_2} \frac{d\zeta}{\delta(\zeta)} + \dots + \tilde{a}_k^2 \oint_{\Gamma_k} \frac{d\zeta}{\delta(\zeta)} - 2\tilde{a}_1\tilde{a}_2 \int_{\Gamma_{12}} \frac{d\zeta}{\delta(\zeta)} - \right. \\
 & - 2\tilde{a}_1\tilde{a}_3 \int_{\Gamma_{13}} \frac{d\zeta}{\delta(\zeta)} - \dots - 2\tilde{a}_1\tilde{a}_k \int_{\Gamma_{1k}} \frac{d\zeta}{\delta(\zeta)} - 2\tilde{a}_2\tilde{a}_3 \int_{\Gamma_{23}} \frac{d\zeta}{\delta(\zeta)} - 2\tilde{a}_2\tilde{a}_4 \int_{\Gamma_{24}} \frac{d\zeta}{\delta(\zeta)} - \dots \\
 & \left. \dots - 2\tilde{a}_2\tilde{a}_k \int_{\Gamma_{2k}} \frac{d\zeta}{\delta(\zeta)} - \dots - 2\tilde{a}_{k-1}\tilde{a}_k \int_{\Gamma_{k-1,k}} \frac{d\zeta}{\delta(\zeta)} \right), \tag{2.12}
 \end{aligned}$$

and the equilibrium equation (2.10) can be presented by the following:

$$M_x = \sum_{k=1}^{n_k} \tilde{a}_k \frac{M_x}{\Omega_0} \Omega_k = \frac{M_x}{\Omega_0} \sum_{k=1}^{n_k} \tilde{a}_k \Omega_k,$$

or

$$\Omega_0 = \sum_{k=1}^{n_k} \tilde{a}_k \Omega_k. \tag{2.13}$$

So, the formulated problem can be presented as searching problem for unknown distribution factors  $\vec{\tilde{a}} = \{\tilde{a}_k\}^T$ ,  $k = \overline{1, n_k}$  of shear forces flows taken along closed contours of section that ensure the least value of Castigliano's functional  $C$  (2.12) subject to equilibrium condition (2.13).

The method of Lagrange multipliers can be used to reduce the problem (2.12) – (2.13) to the searching for a stationary point of the following modified functional  $\Lambda(\vec{\tilde{a}}, \lambda_a)$ , where  $\lambda_a$  is the Lagrange multiplier. Besides, the stationary conditions for the modified functional  $\Lambda(\vec{\tilde{a}}, \lambda_a)$  can be transformed to a system of linear algebraic equations with an order of  $n_k + 1$  presented below in the vector-matrix form:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K} & \vec{\Omega} \\ (\vec{\Omega})^T & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \vec{\tilde{a}} \\ \lambda_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_k \\ \Omega_0 \end{bmatrix}, \tag{2.14}$$

where  $\vec{\Omega} = \{\Omega_k\}^T$ ,  $k = \overline{1, n_k}$  is the column vector of double areas embraced by the closed contours of the thin-walled bar. The resolving system of equations (2.14) to calculate distribution factors  $\vec{\tilde{a}}_k = \{\tilde{a}_k\}^T$ ,  $k = \overline{1, n_k}$  of shear forces flows along the closed contours of the section has been presented below:

$$\begin{bmatrix} \tilde{p}_{11} & -p_{12} & \cdots & -p_{1k} & \cdots & -p_{1n_k} & \Omega_1 \\ -p_{21} & \tilde{p}_{22} & \cdots & -p_{2k} & \cdots & -p_{2n_k} & \Omega_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -p_{k1} & -p_{k2} & \cdots & \tilde{p}_{kk} & \cdots & -p_{kn_k} & \Omega_k \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -p_{n_k 1} & -p_{n_k 2} & \cdots & -p_{n_k k} & \cdots & \tilde{p}_{n_k n_k} & \Omega_{n_k} \\ \Omega_1 & \Omega_2 & \cdots & \Omega_k & \cdots & \Omega_{n_k} & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \tilde{a}_1 \\ \tilde{a}_2 \\ \vdots \\ \tilde{a}_k \\ \vdots \\ \tilde{a}_{n_k} \\ \lambda_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \Omega_0 \end{bmatrix}, \quad (2.15)$$

where the diagonal elements of the matrix are the weights of  $k^{\text{th}}$  closed contour,  $\tilde{p}_{kk} = \tilde{p}_k$ ,  $k = \overline{1, n_k}$ ;  $\Omega_k$  is double area embraced by  $k^{\text{th}}$  closed contour  $\Gamma_k^{\zeta}$ ,  $\Omega_0 = \sum_{k=1}^{n_k} \Omega_k$ ;  $\lambda_a$  is the Lagrange multiplier. Other elements of the matrix  $p_{\alpha\beta}$  take zero value  $p_{\alpha\beta} = p_{\beta\alpha} = 0$  when corresponded closed contours have no common edges:  $\Gamma_{\alpha}^{\zeta} \cap \Gamma_{\beta}^{\zeta} = \emptyset$ , and the sum of weights for all common edges [3] is  $p_{\alpha\beta} = p_{\beta\alpha} = \sum_r p_r$ ,  $\forall r : \mathbf{R}_r^{\zeta} \subseteq \Gamma_{\alpha}^{\zeta} \wedge \mathbf{R}_r^{\zeta} \subseteq \Gamma_{\beta}^{\zeta}$ .

The solution of the system of algebraic equations (2.15) returns the column vector of factors  $\vec{\tilde{a}}_k = \{\tilde{a}_k | k = \overline{1, n_k}\}$  for the distribution of shear forces flows along the closed contours of the section. Based on  $\vec{\tilde{a}}_k$ , we can generate the column vector of factors for the distribution of shear forces flows along the graph  $\mathbf{G}$  edges:  $\mathbf{A}_r = \{a_j | j = \overline{1, n_r}\}$ , where each element should be determined as:

$$a_j = \sum_{k=1}^{n_k} f_{kj} \tilde{a}_k, \quad f_{kj} \in \mathbf{F} \quad \forall j = \overline{1, n_r}. \quad (2.16)$$

Since every graph edge  $\mathbf{R}_j^{\zeta}$ ,  $j = \overline{1, n_r}$ , is described by the set of sectional segments  $\vec{s}_r^{\zeta} \in \mathbf{S}^{\zeta}$  as:  $\mathbf{R}_j^{\zeta} = \{\vec{s}_r^{\zeta} : \vec{s}_r^{\zeta} \in \mathbf{S}^{\zeta} \wedge \vec{s}_r^{\zeta} \in \mathbf{R}_j | r = \overline{1, n_{rj}}\}$ , then it is possible to determine for each sectional segment  $\vec{s}_k^{\zeta} \in \mathbf{S}^{\zeta}$  the value of piecewise constant *distribution function for shear flows taken along section*  $a^{\zeta}(\zeta)$  as the set of  $\mathbf{a}^{\zeta} = \{a_{\kappa}^{\zeta} | \kappa = \overline{1, n_{\zeta} - 1}\}$  as follows:  $a_{\kappa}^{\zeta} = a_j$ ,  $\forall \kappa : \vec{s}_{\kappa}^{\zeta} \cap \mathbf{P}^{\zeta} \neq \emptyset$ , and  $a_{\kappa}^{\zeta} = 0$ , otherwise.

**3. Resolving equations for an arbitrary cross-section of a thin-walled bar.** The search problem of shear forces flows for an arbitrary cross-section of a thin-walled bar (including open-closed multi-contour cross-sections) can be transformed into a minimization problem of Castigliano's functional  $\mathbf{C}$  subject to constraints-equalities of shear forces flows equilibrium formulated for cross-section branch points as well as subject to equilibrium equation for the whole cross-section relating to longitudinal axes of the thin-walled bar [3].

Let us present the formulated problem as a mathematical programming task, namely as searching for unknown values of shear forces flows at the start points

of unbranched parts of a section:

$$\vec{T}_S = \{T_{S,j}\}^T, j = \overline{1, n_r}, \tag{3.1}$$

which ensure the least value of the optimum criterion – Castigliano’s functional  $C$  :

$$C^* = C(\vec{T}_S^*) = \min_{\vec{T}_S \in \mathfrak{S}_T} C(\vec{T}_S), \tag{3.2}$$

on a hyperplane of feasible decisions  $\mathfrak{S}_T$  described by the following system of constraints-equalities:

$$\begin{cases} \mathbf{f}(\vec{T}_S) = \{f_v(\vec{T}_S) = 0 \mid v = \overline{1, n_v - 1}\}; \\ f_x(\vec{T}_S) = 0; \end{cases} \tag{3.3}$$

where  $\vec{T}_S$  is the vector of design variables (searched shear flows);  $n_r$  is the number of unknown shear flows;  $\vec{T}_S^*$  is the optimum decision of the problem;  $C^*$  is the minimum value of Castigliano’s functional;  $f_v$  is the function of the vector argument  $\vec{T}_S$ ;  $n_v$  is the general number of constraints-equalities  $f_v(\vec{T}_S)$  and  $f_x(\vec{T}_S)$  which define the hyperplane of feasible decisions  $\mathfrak{S}_T$  in the sought space.

For Castigliano’s functional  $C$  we will consider Euler’s equations only which define the strain compatibility conditions and are expressed depending on shear forces flows  $\vec{T}_S = \{T_{S,j}\}^T, j = \overline{1, n_r}$ . Let us rewrite Castigliano’s functional  $C$  Eq. (2.6) replacing normal stresses  $\sigma(\zeta)$  by Eq. (1.1), and shear stresses  $\tau(\zeta)$  – by the dependence on shear forces flows Eq. (1.2) as presented below:

$$\begin{aligned} \tau_j(\zeta) &= \frac{1}{\delta_j(\zeta)} \left( T_{S,j} - \frac{Q_z}{I_y} S_{oy,j}(\zeta) - \frac{Q_y}{I_z} S_{oz,j}(\zeta) - \frac{M_{\varpi}}{I_{\varpi}} S_{o\varpi,j}(\zeta) \right), \tag{3.4} \\ C &= \sum_{j=1}^{n_r} \left[ \frac{1}{2G} \int_{\ell_j} \frac{1}{2(1+\nu)} \left( \frac{N}{A} + \frac{M_y}{I_y} z_j + \frac{M_z}{I_z} y_j + \frac{B}{I_{\varpi}} \varpi_j \right)^2 \delta_j d\zeta + \right. \\ &+ \frac{1}{2G} \int_{\ell_j} \left( T_{S,j}^2 - 2T_{S,j} \frac{Q_z}{I_y} S_{oy,j} - 2T_{S,j} \frac{Q_y}{I_z} S_{oz,j} - 2T_{S,j} \frac{M_{\varpi}}{I_{\varpi}} S_{o\varpi,j} \right) \frac{d\zeta}{\delta_j} + \\ &\left. + \frac{1}{2G} \int_{\ell_j} \left( \frac{Q_z}{I_y} S_{oy,j} + \frac{Q_y}{I_z} S_{oz,j} + \frac{M_{\varpi}}{I_{\varpi}} S_{o\varpi,j} \right)^2 \frac{d\zeta}{\delta_j} \right], \tag{3.5} \end{aligned}$$

here we omitted the functional dependence on the angular position  $\zeta$  (to simplify presented formulas).

Let us leave in (3.5) those summands that depend on shear forces flows values  $\vec{T}_S = \{T_{S,j}\}^T, j = \overline{1, n_r}$ , and also denote by the symbol ... all other summands that are do not depend on the vector  $\vec{T}_S$ . In this way we have obtain the expression for Castigliano’s functional  $C$  in terms of shear forces flows  $\vec{T}_S = \{T_{S,j}\}^T$  [3] as presented below:

$$C = \sum_{j=1}^{n_r} \left( \int_{\ell_j} \left( \frac{T_{S,j}^2}{2G} - T_{S,j} \frac{Q_z}{GI_y} S_{oy,j} - T_{S,j} \frac{Q_y}{GI_z} S_{oz,j} - T_{S,j} \frac{M_{\omega}}{GI_{\omega}} S_{o\omega,j} \right) \frac{d\zeta}{\delta_j} + \dots \right), \quad (3.6)$$

$$C = \sum_{j=1}^{n_r} \left[ \frac{T_{S,j}^2}{2G} \int_{\ell_j} \frac{d\zeta}{\delta_j} - T_{S,j} \frac{Q_z}{GI_y} \int_{\ell_j} S_{oy,j} \frac{d\zeta}{\delta_j} - T_{S,j} \frac{Q_y}{GI_z} \int_{\ell_j} S_{oz,j} \frac{d\zeta}{\delta_j} - T_{S,j} \frac{M_{\omega}}{GI_{\omega}} \int_{\ell_j} S_{o\omega,j} \frac{d\zeta}{\delta_j} + \dots \right]. \quad (3.7)$$

Where the integral  $\int_{\ell_j} \frac{d\zeta}{\delta_j}$  can be calculated according to (2.1), and the integrals  $\int_{\ell_j} S_{oy,j} \frac{d\zeta}{\delta_j}$ ,  $\int_{\ell_j} S_{oz,j} \frac{d\zeta}{\delta_j}$  and  $\int_{\ell_j} S_{o\omega,j} \frac{d\zeta}{\delta_j}$  – using following equations

(3.8), (3.9) and (3.10) accordingly presented below,  $\forall \kappa: \vec{s}_{\kappa}^{\zeta} \in \mathbf{R}^{\zeta} \wedge \vec{s}_{\kappa}^{\zeta} \in \mathbf{S}^{\zeta}$ :

$$S_{hz,j} = \int_{\ell_{rj}} \frac{S_{oz,j}^{\zeta}(\zeta) d\zeta}{\delta(\zeta)} = \sum_{\kappa=1}^{n_{rj}} \left( \frac{I_{\kappa}^{\zeta}}{6\delta_{\kappa}^{\zeta}} \left( S_{oz,\kappa}^{\zeta,start} + 4S_{oz,\kappa}^{\zeta,mid} + S_{oz,\kappa}^{\zeta,end} \right) \right); \quad (3.8)$$

$$S_{hy,j} = \int_{\ell_{rj}} \frac{S_{oy,j}^{\zeta}(\zeta) d\zeta}{\delta(\zeta)} = \sum_{\kappa=1}^{n_{rj}} \left( \frac{I_{\kappa}^{\zeta}}{6\delta_{\kappa}^{\zeta}} \left( S_{oy,\kappa}^{\zeta,start} + 4S_{oy,\kappa}^{\zeta,mid} + S_{oy,\kappa}^{\zeta,end} \right) \right); \quad (3.9)$$

$$S_{h\omega,j} = \int_{\ell_{rj}} \frac{S_{o\omega,j}^{\zeta}(\zeta) d\zeta}{\delta(\zeta)} = \sum_{\kappa=1}^{n_{rj}} \left( \frac{I_{\kappa}^{\zeta}}{6\delta_{\kappa}^{\zeta}} \left( S_{o\omega,\kappa}^{\zeta,start} + 4S_{o\omega,\kappa}^{\zeta,mid} + S_{o\omega,\kappa}^{\zeta,end} \right) \right). \quad (3.10)$$

Let us define the following column vectors consisting of  $n_r$  elements,  $\forall j = \overline{1, n_r}$  (according to the number of edges of the graph  $\mathbf{G}^r$ ):

$$\vec{S}_{hz} = \begin{bmatrix} S_{hz,1} \\ S_{hz,2} \\ \vdots \\ S_{hz,n_r} \end{bmatrix}; \quad \vec{S}_{hy} = \begin{bmatrix} S_{hy,1} \\ S_{hy,2} \\ \vdots \\ S_{hy,n_r} \end{bmatrix}; \quad \vec{S}_{h\omega} = \begin{bmatrix} S_{h\omega,1} \\ S_{h\omega,2} \\ \vdots \\ S_{h\omega,n_r} \end{bmatrix}. \quad (3.11)$$

Using the weighting matrix of unbranched sectional parts  $\mathbf{W}$  (2.2) introduced above as well as column vectors  $\vec{S}_{hz}$ ,  $\vec{S}_{hy}$  and  $\vec{S}_{h\omega}$  presented above (3.11), we can rewrite Castigliano’s functional (3.7) as the following vector-matrix equation:

$$C = \frac{1}{2G} \vec{T}_S^T \mathbf{W} \vec{T}_S - \vec{T}_S^T \frac{Q_z}{GI_y} \vec{S}_{hz} - \vec{T}_S^T \frac{Q_y}{GI_z} \vec{S}_{hy} - \vec{T}_S^T \frac{M_{\omega}}{GI_{\omega}} \vec{S}_{h\omega} + \dots \quad (3.12)$$

Next, for each section branch point we can develop an equation of shear forces flows equilibrium in terms of projections on the longitudinal axis of the thin-walled bar (Fig. 4). In order to obtain the general view for these equations (the system of equations by the number of branch points in the section), we can

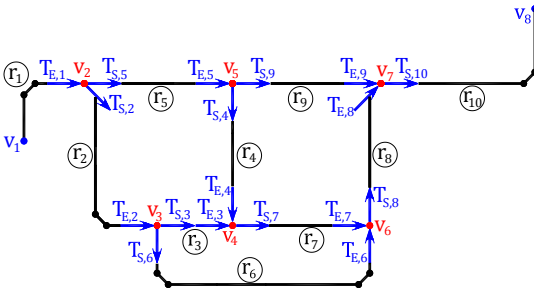


Fig. 4. Relating to formulate equilibrium equations for shear stresses flows in branch points of a thin-walled bar

use the incidence matrices  $\mathbf{i}$  and  $|\mathbf{i}|$  introduced above, which reflect the topological structure of the considered cross-section of the thin-walled bar. In this case we obtain the following system of equations presented below in the matrix-vector form:

$$\left(|\mathbf{i}| + \mathbf{i}\right)\vec{T}_S - \left(|\mathbf{i}| - \mathbf{i}\right)\vec{T}_E = \mathbf{0}, \tag{3.13}$$

where  $\vec{T}_S = \{T_{S,j}\}^T, j = \overline{1, n_r}$  is the vector of shear forces flows at the start points of unbranched sectional parts;  $\vec{T}_E = \{T_{E,j}\}^T, j = \overline{1, n_r}$  is the vector of shear forces flows at the end points of unbranched sectional parts:

$$\vec{T}_E = \vec{T}_S - \Delta\vec{T}, \tag{3.14}$$

where  $\Delta\vec{T} = \{\Delta T_j\}^T, j = \overline{1, n_r}$  is the vector of shear forces flows increments for each unbranched sectional part:

$$\Delta\vec{T}_j = \frac{Q_y}{I_z} \vec{S}_{z,j} + \frac{Q_z}{I_y} \vec{S}_{y,j} + \frac{M_{\omega}}{I_{\omega}} \vec{S}_{\omega,j}, \tag{3.15}$$

where the vectors  $\vec{S}_{z,j}, \vec{S}_{y,j}, \vec{S}_{\omega,j}$  are presented below:

$$\vec{S}_z = \begin{bmatrix} S_{z,1} \\ S_{z,2} \\ \vdots \\ S_{z,n_r} \end{bmatrix}; \quad \vec{S}_y = \begin{bmatrix} S_{y,1} \\ S_{y,2} \\ \vdots \\ S_{y,n_r} \end{bmatrix}; \quad \vec{S}_{\omega} = \begin{bmatrix} S_{\omega,1} \\ S_{\omega,2} \\ \vdots \\ S_{\omega,n_r} \end{bmatrix} \tag{3.16}$$

and the components of vectors  $\vec{S}_{z,j}, \vec{S}_{y,j}, \vec{S}_{\omega,j}$  can be calculated as follow,

$$\forall \kappa: \vec{s}_{\kappa}^{\zeta} \in \mathbf{R}^{\zeta} \wedge \vec{s}_{\kappa}^{\zeta} \in \mathbf{S}^{\zeta}:$$

$$S_{z,j} = \int_{\ell_{rj}} y^{\zeta}(\zeta) \delta(\zeta) d\zeta = \sum_{\kappa=1}^{n_{\zeta j}} \left( \delta_{\kappa}^{\zeta} I_{\kappa}^{\zeta} \left( y_{\kappa}^{\zeta, start} + \frac{1}{2} \Delta y_{\kappa}^{\zeta} \right) \right), \tag{3.17}$$

$$S_{y,j} = \int_{\ell_{rj}} z^{\zeta}(\zeta) \delta(\zeta) d\zeta = \sum_{\kappa=1}^{n_{\zeta j}} \left( \delta_{\kappa}^{\zeta} I_{\kappa}^{\zeta} \left( z_{\kappa}^{\zeta, start} + \frac{1}{2} \Delta z_{\kappa}^{\zeta} \right) \right), \tag{3.18}$$

$$S_{\omega,j} = \int_{\ell_{rj}} \omega^{\zeta}(\zeta) \delta(\zeta) d\zeta = \sum_{\kappa=1}^{n_{\zeta j}} \left( \delta_{\kappa}^{\zeta} I_{\kappa}^{\zeta} \left( \omega_{\kappa}^{\zeta, start} + \frac{1}{2} \Delta \omega_{\kappa}^{\zeta} \right) \right). \tag{3.19}$$

Let us rewrite the system of equations (3.13) substituting  $\vec{T}_E$  according to (3.14). We obtain the following system of equations:

$$\left(\left|\mathbf{i}\right|+\mathbf{i}\right)\vec{T}_S-\left(\left|\mathbf{i}\right|-\mathbf{i}\right)\times\left(\vec{T}_S-\Delta\vec{T}\right)=\mathbf{0}, \quad (3.20)$$

$$\left(\left|\mathbf{i}\right|+\mathbf{i}\right)\vec{T}_S-\left(\left|\mathbf{i}\right|-\mathbf{i}\right)\vec{T}_S+\left(\left|\mathbf{i}\right|-\mathbf{i}\right)\Delta\vec{T}=\mathbf{0}, \quad (3.21)$$

$$2\mathbf{i}\vec{T}_S+\left(\left|\mathbf{i}\right|-\mathbf{i}\right)\Delta\vec{T}=\mathbf{0} \quad (3.22)$$

and taking into account (3.15):

$$2\mathbf{i}\vec{T}_S+\left(\left|\mathbf{i}\right|-\mathbf{i}\right)\times\left(\frac{Q_y}{I_z}\vec{S}_{z,j}+\frac{Q_z}{I_y}\vec{S}_{y,j}+\frac{M_{\omega}}{I_{\omega}}\vec{S}_{\omega,j}\right)=\mathbf{0}. \quad (3.23)$$

The system of equations (3.23) presented above in the matrix-vector form has  $n_v$  equilibrium equations. The last equation is linear-dependent or a linear combination from the previous  $n_v-1$  equations. Let us rewrite the system of equations (3.23) excluding the last equilibrium equation:

$$2\mathbf{i}'\vec{T}_S+\left(\left|\mathbf{i}'\right|-\mathbf{i}'\right)\times\left(\frac{Q_y}{I_z}\vec{S}_{z,j}+\frac{Q_z}{I_y}\vec{S}_{y,j}+\frac{M_{\omega}}{I_{\omega}}\vec{S}_{\omega,j}\right)=\mathbf{0}, \quad (3.24)$$

where  $\mathbf{i}'$  is the incidence matrix of the graph  $\mathbf{G}$  truncated by the last row with dimensions  $(n_v-1)\times n_r$ ,  $\mathbf{i}'=\{g_{ij} \mid i=\overline{1, n_v-1}, j=\overline{1, n_r}\}$ ;  $\left|\mathbf{i}'\right|$  is the matrix composed using the modulus of elements  $g_{ij}$  of the truncated matrix  $\mathbf{i}'$  as  $\left|\mathbf{i}'\right|=\left\{\left|g_{ij}\right| \mid i=\overline{1, n_v-1}, j=\overline{1, n_r}\right\}$ .

It is possible to derive the last equilibrium equation relating to the longitudinal axis  $x-x$  of the thin-walled bar as a condition of the static equivalence of the torsion moment caused by the shear forces flows to the total torque  $M_x$  acting in the cross-section of the thin-walled bar:

$$M_x-\sum_{j=1}^{n_r}\int T_j(\zeta)d\omega=0, \quad (3.25)$$

where  $T_j(\zeta)$  is the shear forces flow at some point of the cross-section, which can be expressed depending on shear forces flow  $T_{S,j}(\zeta)$  at the start point of the corresponded unbranched part of the section as follow:

$$T_j=T_{S,j}-\frac{Q_y}{I_z}S_{oz,j}-\frac{Q_z}{I_y}S_{oy,j}-\frac{M_{\omega}}{I_{\omega}}S_{o\omega,j}, \quad (3.26)$$

where we omitted the functional dependence from the angular position  $\zeta$  (to simplify presented formulas).

Then:

$$M_x-\sum_{j=1}^{n_r}\int\left(T_{S,j}-\frac{Q_y}{I_z}S_{oz,j}-\frac{Q_z}{I_y}S_{oy,j}-\frac{M_{\omega}}{I_{\omega}}S_{o\omega,j}\right)\rho d\zeta=0;$$

$$M_x - \sum_{j=1}^{n_r} \left( T_{S,j} \int_{\ell_j} \rho d\zeta - \frac{Q_y}{I_z} \int_{\ell_j} S_{oz,j} \rho d\zeta - \frac{Q_z}{I_y} \int_{\ell_j} S_{oy,j} \rho d\zeta - \frac{M_{\overline{\omega}}}{I_{\overline{\omega}}} \int_{\ell_j} S_{o\overline{\omega},j} \rho d\zeta \right) = 0.$$

Finally, we obtain [3]:

$$\sum_{j=1}^{n_r} T_{S,j} \int_{\ell_j} \rho d\zeta - \frac{Q_y}{I_z} \sum_{j=1}^{n_r} \int_{\ell_j} S_{oz,j} \rho d\zeta - \frac{Q_z}{I_y} \sum_{j=1}^{n_r} \int_{\ell_j} S_{oy,j} \rho d\zeta - \frac{M_{\overline{\omega}}}{I_{\overline{\omega}}} \sum_{j=1}^{n_r} \int_{\ell_j} S_{o\overline{\omega},j} \rho d\zeta - M_x = 0, \tag{3.27}$$

where integrals  $\sum_{j=1}^{n_r} \int_{\ell_j} S_{oz,j} \rho d\zeta$ ,  $\sum_{j=1}^{n_r} \int_{\ell_j} S_{oy,j} \rho d\zeta$  and  $\sum_{j=1}^{n_r} \int_{\ell_j} S_{o\overline{\omega},j} \rho d\zeta$  can be calculated using (3.28), (3.29) and (3.30) accordingly as presented below,  $\forall \kappa : \vec{s}_{\kappa}^{\zeta} \in \mathbf{R}_j^{\zeta} \wedge \vec{s}_{\kappa}^{\zeta} \in \mathbf{S}^{\zeta}$ :

$$S_{\rho z} = \sum_{j=1}^{n_r} \int_{\ell_{rj}} S_{oz,j}^{\zeta}(\omega) \rho d\zeta = \sum_{j=1}^{n_r} \left( \sum_{\kappa=1}^{n_{zj}} \frac{\Delta \omega_{\kappa}^{\zeta}}{6} \left( S_{oz,\kappa}^{\zeta, start} + 4S_{oz,\kappa}^{\zeta, mid} + S_{oz,\kappa}^{\zeta, end} \right) \right), \tag{3.28}$$

$$S_{\rho y} = \sum_{j=1}^{n_r} \int_{\ell_{rj}} S_{oy,j}^{\zeta}(\omega) \rho d\zeta = \sum_{j=1}^{n_r} \left( \sum_{\kappa=1}^{n_{zj}} \frac{\Delta \omega_{\kappa}^{\zeta}}{6} \left( S_{oy,\kappa}^{\zeta, start} + 4S_{oy,\kappa}^{\zeta, mid} + S_{oy,\kappa}^{\zeta, end} \right) \right), \tag{3.29}$$

$$S_{\rho \overline{\omega}} = \sum_{j=1}^{n_r} \int_{\ell_{rj}} S_{o\overline{\omega},j}^{\zeta}(\omega) \rho d\zeta = \sum_{j=1}^{n_r} \left( \sum_{\kappa=1}^{n_{zj}} \frac{\Delta \omega_{\kappa}^{\zeta}}{6} \left( S_{o\overline{\omega},\kappa}^{\zeta, start} + 4S_{o\overline{\omega},\kappa}^{\zeta, mid} + S_{o\overline{\omega},\kappa}^{\zeta, end} \right) \right). \tag{3.30}$$

Let us rewrite the constraints-equality (3.27) using vector representation taking into account equations (3.28), (3.29) and (3.30) as presented below:

$$\vec{\omega}^T \vec{T}_S - \frac{Q_y}{I_z} S_{\rho z} - \frac{Q_z}{I_y} S_{\rho y} - \frac{M_{\overline{\omega}}}{I_{\overline{\omega}}} S_{\rho \overline{\omega}} - M_x = 0. \tag{3.31}$$

Thus, the formulated problem is presented as a mathematical programming task of searching for the unknown values of shear forces flows at the start points of the unbranched parts of the section:

$$\vec{T}_S = \{T_{S,j}\}^T, j = \overline{1, n_r}, \tag{3.32}$$

which ensure the least value of the following Castigliano's functional **C** (3.12):

$$\mathbf{C} = \frac{1}{2G} \vec{T}_S^T \mathbf{W} \vec{T}_S - \vec{T}_S^T \frac{Q_y}{GI_z} \vec{S}_{hz} - \vec{T}_S^T \frac{Q_z}{GI_y} \vec{S}_{hy} - \vec{T}_S^T \frac{M_{\overline{\omega}}}{GI_{\overline{\omega}}} \vec{S}_{h\overline{\omega}} + \dots \rightarrow \min, \tag{3.33}$$

subject to the following equilibrium conditions (3.24) and (3.31):

$$\begin{cases} 2\mathbf{i}' \vec{T}_S + (|\mathbf{i}'| - \mathbf{i}') \left( \frac{Q_y}{I_z} \vec{S}_{z,j} + \frac{Q_z}{I_y} \vec{S}_{y,j} + \frac{M_{\overline{\omega}}}{I_{\overline{\omega}}} \vec{S}_{\overline{\omega},j} \right) = \mathbf{0}; \\ \vec{\omega}^T \vec{T}_S - \frac{Q_y}{I_z} S_{\rho z} - \frac{Q_z}{I_y} S_{\rho y} - \frac{M_{\overline{\omega}}}{I_{\overline{\omega}}} S_{\rho \overline{\omega}} - M_x = 0. \end{cases} \tag{3.34}$$



The method of Lagrange multipliers can be used to reduce the mathematical programming task (3.32) – (3.34) to the searching for the stationary point of the following modified functional  $\Lambda(\vec{T}_S, \vec{\lambda}^T, \lambda_{n_v})$ :

$$\begin{aligned} \Lambda(\vec{T}_S, \vec{\lambda}^T, \lambda_{n_v}) = & \frac{1}{2G} \vec{T}_S^T \mathbf{W} \vec{T}_S - \vec{T}_S^T \frac{Q_y}{GI_z} \vec{S}_{hz} - \vec{T}_S^T \frac{Q_z}{GI_y} \vec{S}_{hy} - \vec{T}_S^T \frac{M_{\overline{\omega}}}{GI_{\overline{\omega}}} \vec{S}_{h\overline{\omega}} + \\ & + \vec{\lambda}^T \left[ 2\vec{\mathbf{i}}^T \vec{T}_S + (|\vec{\mathbf{i}}'| - \vec{\mathbf{i}}') \left( \frac{Q_y}{I_z} \vec{S}_{z,j} + \frac{Q_z}{I_y} \vec{S}_{y,j} + \frac{M_{\overline{\omega}}}{I_{\overline{\omega}}} \vec{S}_{\overline{\omega},j} \right) \right] + \\ & + \lambda_{n_v} \left[ \vec{\omega}^T \vec{T}_S - \frac{Q_y}{I_z} S_{\rho z} - \frac{Q_z}{I_y} S_{\rho y} - \frac{M_{\overline{\omega}}}{I_{\overline{\omega}}} S_{\rho \overline{\omega}} - M_x \right] \rightarrow \min, \end{aligned} \quad (3.35)$$

where  $\vec{\lambda} = \{\lambda_f\}$ ,  $f = \overline{1, n_v - 1}$  is the vector of Lagrange multipliers consisting of  $n_v - 1$  elements;  $\lambda_{n_v}$  is an additional Lagrange multiplier.

The stationary conditions of the modified functional  $\Lambda(\vec{T}_S, \vec{\lambda}^T, \lambda_{n_v})$  (3.35) can be transformed into a system of  $n_r + n_v$  linear algebraic equations and presented in vector-matrix form as follow [3]:

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} \frac{1}{G} \mathbf{W} & 2\vec{\mathbf{i}}'^T & \Delta\omega_{\mathbf{r}}^{\xi} \\ 2\vec{\mathbf{i}}' & \Theta_{n_v-1, n_v-1} & \mathbf{0}_{n_v-1} \\ (\Delta\omega_{\mathbf{r}}^{\xi})^T & \mathbf{0}_{n_v-1}^T & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \vec{T}_S \\ \vec{\lambda} \\ \lambda_{n_v} \end{bmatrix} = M_x \times \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{n_r} \\ \mathbf{0}_{n_v-1} \\ 1 \end{bmatrix} + \\ & + \frac{Q_y}{I_z} \times \begin{bmatrix} \vec{S}_{hz} \\ G \\ (\vec{\mathbf{i}}' - |\vec{\mathbf{i}}'|) \vec{S}_z \\ S_{\rho z} \end{bmatrix} + \frac{Q_z}{I_y} \times \begin{bmatrix} \vec{S}_{hy} \\ G \\ (\vec{\mathbf{i}}' - |\vec{\mathbf{i}}'|) \vec{S}_y \\ S_{\rho y} \end{bmatrix} + \frac{M_{\overline{\omega}}}{I_{\overline{\omega}}} \times \begin{bmatrix} \vec{S}_{h\overline{\omega}} \\ G \\ (\vec{\mathbf{i}}' - |\vec{\mathbf{i}}'|) \vec{S}_{\overline{\omega}} \\ S_{\rho \overline{\omega}} \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (3.36)$$

where

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \frac{1}{G} \mathbf{W} & 2\vec{\mathbf{i}}'^T & \Delta\omega_{\mathbf{r}}^{\xi} \\ 2\vec{\mathbf{i}}' & \Theta_{n_v-1, n_v-1} & \mathbf{0}_{n_v-1} \\ (\Delta\omega_{\mathbf{r}}^{\xi})^T & \mathbf{0}_{n_v-1}^T & 0 \end{bmatrix};$$

$\mathbf{M}$  is a square matrix with dimensions  $(n_r + n_v) \times (n_r + n_v)$ , here  $n_r$  and  $n_v$  are the numbers of edges and vertices of the graph  $\mathbf{G}$ , accordingly;  $\Delta\omega_{\mathbf{r}}^{\xi}$  is the column vector of sectorial coordinates increments  $\Delta\omega_{\mathbf{r}}^{\xi} = \{\Delta\omega_{\mathbf{r},j}^{\xi} | j = \overline{1, n_r}\}^T$  consisting of  $n_r$  components calculated according to (2.3);  $\vec{S}_y$ ,  $\vec{S}_z$ ,  $\vec{S}_{\overline{\omega}}$  are the column vectors (3.16) with  $n_r$  components calculated according to (3.17), (3.18) and (3.19) respectively;  $\vec{S}_{hy}$ ,  $\vec{S}_{hz}$ ,  $\vec{S}_{h\overline{\omega}}$  are the column vectors (3.11)

with  $n_r$  components calculated according to (3.8), (3.9) and (3.10) respectively;  $S_{\rho y}$ ,  $S_{\rho z}$ ,  $S_{\rho \omega}$  are the integral section properties calculated according to (3.28), (3.29) and (3.30) respectively.

The solution of the system of equations (3.36) determines the column vector of shear forces flows  $\vec{T}_S = \{T_{S,j}\}^T, j = \overline{1, n_r}$ , at the start points of unbranched cross-section parts. The vector  $\vec{T}_S$  can be also presented as follow:

$$\vec{T}_S = M_x \vec{b}_x + \frac{Q_y}{I_z} \vec{b}_z + \frac{Q_z}{I_y} \vec{b}_y + \frac{M_{\omega}}{I_{\omega}} \vec{b}_{\omega}. \tag{3.37}$$

In this case, the system of algebraic equations (3.36) disintegrates and transforms into four systems of  $n_r + n_v$  algebraic equations relating to the column vectors  $\vec{b}_x, \vec{b}_y, \vec{b}_z$  and  $\vec{b}_{\omega}$  consisting of  $n_r$  elements [3] as presented below:

$$\mathbf{M} \times \begin{bmatrix} \vec{b}_x \\ \vec{\lambda}_x \\ \lambda_{n_x,x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{n_r} \\ \mathbf{0}_{n_v-1} \\ 1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{M} \times \begin{bmatrix} \vec{b}_y \\ \vec{\lambda}_y \\ \lambda_{n_y,y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\vec{S}_{hy}}{G} \\ (\mathbf{i}' - |\mathbf{i}'|) \times \vec{S}_y \\ S_{\rho y} \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{M} \times \begin{bmatrix} \vec{b}_z \\ \vec{\lambda}_z \\ \lambda_{n_z,z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\vec{S}_{hz}}{G} \\ (\mathbf{i}' - |\mathbf{i}'|) \times \vec{S}_z \\ S_{\rho z} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{M} \times \begin{bmatrix} \vec{b}_{\omega} \\ \vec{\lambda}_{\omega} \\ \lambda_{n_{\omega},\omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\vec{S}_{h\omega}}{G} \\ (\mathbf{i}' - |\mathbf{i}'|) \times \vec{S}_{\omega} \\ S_{\rho \omega} \end{bmatrix}, \tag{3.38}$$

where  $\vec{\lambda}_x = \{\lambda_{x,f}\}^T, \vec{\lambda}_y = \{\lambda_{y,f}\}^T, \vec{\lambda}_z = \{\lambda_{z,f}\}^T, \vec{\lambda}_{\omega} = \{\lambda_{\omega,f}\}^T, f = \overline{1, n_v - 1}$  are the unknown column vectors of Lagrange multipliers consisting of  $n_v - 1$  elements;  $\lambda_{n_x,x}, \lambda_{n_y,y}, \lambda_{n_z,z}, \lambda_{n_{\omega},\omega}$  are the additional Lagrange multipliers.

The projection of the vector  $\vec{b}_x = \{b_{x,j} | j = \overline{1, n_r}\}$  defined of the set of  $n_r$  unbranched sectional parts into the set of sectional segments  $\vec{b}_x^{\zeta} = \{b_{x,\kappa}^{\zeta} | \kappa = \overline{1, n_{\zeta} - 1}\}$  can be written as:  $b_{x,\kappa}^{\zeta} = b_{x,j} \quad \forall \kappa: \vec{s}_{\kappa}^{\zeta} \subseteq \mathbf{R}_j^{\zeta}$ ; and  $b_{x,\kappa}^{\zeta} = 0 \quad \forall \kappa: \vec{s}_{\kappa}^{\zeta} \cap \mathbf{R}_j^{\zeta} = \emptyset$ . Similarly, the column vectors  $\vec{b}_y = \{b_{y,j} | j = \overline{1, n_r}\}, \vec{b}_z = \{b_{z,j} | j = \overline{1, n_r}\}$  and  $\vec{b}_{\omega} = \{b_{\omega,j} | j = \overline{1, n_r}\}$  can be also projected into the set of sectional segments obtaining corresponded column vectors  $\vec{b}_y^{\zeta} = \{b_{y,\kappa}^{\zeta} | \kappa = \overline{1, n_{\zeta} - 1}\}, \vec{b}_z^{\zeta} = \{b_{z,\kappa}^{\zeta} | \kappa = \overline{1, n_{\zeta} - 1}\}$  and  $\vec{b}_{\omega}^{\zeta} = \{b_{\omega,\kappa}^{\zeta} | \kappa = \overline{1, n_{\zeta} - 1}\}$ .

The following transformations for the first moments of inertia and for the sectorial moment of inertia should be performed,  $\forall \kappa = \overline{1, n_{\zeta} - 1}$ :

$$\vec{S}_{oz,\kappa}^{\zeta} \leftarrow \{S_{oz,\kappa}^{\zeta} - b_{z,\kappa}^{\zeta}\}; \quad \vec{S}_{oy,\kappa}^{\zeta} \leftarrow \{S_{oy,\kappa}^{\zeta} - b_{y,\kappa}^{\zeta}\}; \tag{3.39}$$

$$\bar{S}_{o\bar{w},\kappa}^{\zeta} \leftarrow \left\{ S_{o\bar{w},\kappa}^{\zeta} - b_{\bar{w},\kappa}^{\zeta} \right\}; \quad \tilde{S}_{o\bar{w},\kappa}^{\zeta} \leftarrow \left\{ \bar{S}_{o\bar{w},\kappa}^{\zeta} - a_{\kappa}^{\zeta} \frac{I_{\bar{w}}}{\Omega_0} \right\}. \quad (3.40)$$

Let us define the sets of shear forces flows values for the start, middle and end points at the middle line of the sectional segments  $\mathbf{T}^{\zeta, st} = \left\{ T_{\kappa}^{\zeta, st} \right\}$ ,  $\mathbf{T}^{\zeta, mid} = \left\{ T_{\kappa}^{\zeta, mid} \right\}$ ,  $\mathbf{T}^{\zeta, end} = \left\{ T_{\kappa}^{\zeta, end} \right\}$ ,  $\kappa = \overline{1, n_{\zeta} - 1}$ , consisting of  $n_{\zeta} - 1$  elements (by the number of sectional segments) as presented below [16]:

$$T_{\kappa}^{\zeta, start} = \frac{\wp H}{\Omega_0} a_{\kappa}^{\zeta} - \frac{Q_y}{I_z} \bar{S}_{oz, \kappa}^{\zeta, start} - \frac{Q_z}{I_y} \bar{S}_{oy, \kappa}^{\zeta, start} - \frac{M_{\bar{w}}}{I_{\bar{w}}} \tilde{S}_{o\bar{w}, \kappa}^{\zeta, start}, \quad (3.41)$$

$$T_{\kappa}^{\zeta, mid} = \frac{\wp H}{\Omega_0} a_{\kappa}^{\zeta} - \frac{Q_y}{I_z} \bar{S}_{oz, \kappa}^{\zeta, mid} - \frac{Q_z}{I_y} \bar{S}_{oy, \kappa}^{\zeta, mid} - \frac{M_{\bar{w}}}{I_{\bar{w}}} \tilde{S}_{o\bar{w}, \kappa}^{\zeta, mid}, \quad (3.42)$$

$$T_{\kappa}^{\zeta, end} = \frac{\wp H}{\Omega_0} a_{\kappa}^{\zeta} - \frac{Q_y}{I_z} \bar{S}_{oz, \kappa}^{\zeta, end} - \frac{Q_z}{I_y} \bar{S}_{oy, \kappa}^{\zeta, end} - \frac{M_{\bar{w}}}{I_{\bar{w}}} \tilde{S}_{o\bar{w}, \kappa}^{\zeta, end}, \quad (3.43)$$

where the first moments of inertia  $\bar{S}_{oz, \kappa}^{\zeta}$ ,  $\bar{S}_{oy, \kappa}^{\zeta}$  and the sectorial moment of inertia  $\tilde{S}_{o\bar{w}, \kappa}^{\zeta}$  are calculated using transformations (3.39) and (3.40), accordingly.

The shear stresses for each  $\kappa^{\text{th}}$  sectional segment  $\boldsymbol{\tau}^{\zeta} = \left\{ \boldsymbol{\tau}_{\kappa}^{\zeta} = \left\{ \tau_{\kappa}^{\zeta, start}, \tau_{\kappa}^{\zeta, mid}, \tau_{\kappa}^{\zeta, end} \right\} \right\}$ ,  $\kappa = \overline{1, n_{\zeta} - 1}$ , can be calculated as presented below:

$$\boldsymbol{\tau}_{\kappa}^{\zeta} = \left\{ \begin{array}{l} \tau_{\kappa}^{\zeta, start} = \left| \frac{T_{\kappa}^{\zeta, start}}{\delta_{\kappa}^{\zeta}} \right| \pm \frac{(1 - \wp) H \delta_{\kappa}^{\zeta}}{I_k} \\ \tau_{\kappa}^{\zeta, mid} = \left| \frac{T_{\kappa}^{\zeta, mid}}{\delta_{\kappa}^{\zeta}} \right| \pm \frac{(1 - \wp) H \delta_{\kappa}^{\zeta}}{I_k} \\ \tau_{\kappa}^{\zeta, end} = \left| \frac{T_{\kappa}^{\zeta, end}}{\delta_{\kappa}^{\zeta}} \right| \pm \frac{(1 - \wp) H \delta_{\kappa}^{\zeta}}{I_k} \end{array} \right\}, \quad (3.44)$$

where the torsion moment of inertia  $I_x$  and the parameter  $\wp$  are calculated as:

$$I_x = I_k + I_{\Gamma} = \frac{1}{3} \sum_{\kappa=1}^{n_{\zeta}-1} I_{\kappa}^{\zeta} \left( \delta_{\kappa}^{\zeta} \right)^3 + I_{\Gamma}, \quad (3.45)$$

$$\wp = 1 - I_k / I_x. \quad (3.46)$$

The components  $\left| T_{\kappa}^{\zeta, start} / \delta_{\kappa}^{\zeta} \right|$ ,  $\left| T_{\kappa}^{\zeta, mid} / \delta_{\kappa}^{\zeta} \right|$  and  $\left| T_{\kappa}^{\zeta, end} / \delta_{\kappa}^{\zeta} \right|$  in (3.44) define shear stresses values for the start, middle and end points at the middle line of  $\kappa^{\text{th}}$  sectional segment, accordingly. Besides, transition from the shear stresses related to the middle line of  $\kappa^{\text{th}}$  segment to the shear stresses at the outside longitudinal edges of this segment can be performed by addition or subtraction of the member  $(1 - \wp) H \delta_{\kappa}^{\zeta} I_k^{-1}$ .

**5. Software implementation and numerical examples.** The numerical algorithm developed and presented above has been implemented in SCAD Office environment by the program TONUS (www.scadsoft.com) (see Fig. 5) [19]. The

computer program TONUS presented below is intended to create cross-sections of the thin-walled bars, to calculate geometrical properties as well as to calculate normal, shear and equivalent stresses in these cross-sections [5]. Software TONUS allows to consider arbitrary (including open-closed) cross-sections of the thin-walled bars. A cross-section of the thin-walled bar is constructed from the set of segments (stripes) by specifying node coordinates which define the position of segment ends as well as by specifying thicknesses for all segments.

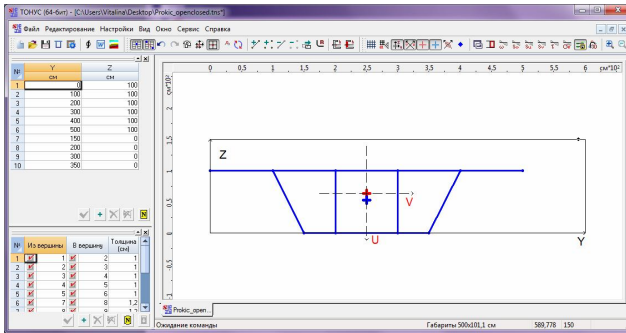


Fig. 5. TONUS main window

Besides calculation of geometrical properties for the cross-sections of the thin-walled bars software TONUS also represents sectorial coordinates diagram as well as static moment diagrams  $S_u$ ,  $S_v$  and first sectorial moment  $S_\omega$  diagram.

In order to represent normal, shear and equivalent stresses diagram in the section of the thin-walled bar user should specify internal forces acting in the section. Initial data to construct normal stresses diagram are bending moments  $M_u$  and  $M_v$  relating to the main axis of inertia of the thin-walled bar cross-section, axial force  $N$  applied at the center of mass of the section as well as warping bimoment  $B$ . Initial data to construct shear stresses diagram are shear forces  $Q_u$  and  $Q_v$  applied at the center of mass of the cross-section as well as total torque  $M_x$  and warping torque  $M_\omega$ . In order to represent equivalent stresses diagram user should also specify a strength theory.

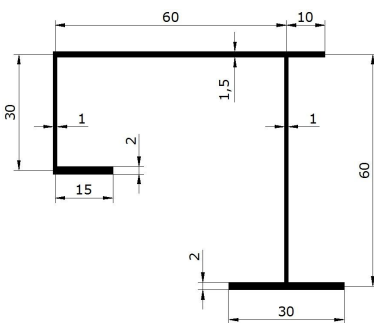


Fig. 6. Open section of thin-walled bar with cross-sectional sizes, cm

**5.1. Example 1: thin-walled bar with open profile.** Let us to consider an example of calculation of a thin-walled bar with open profile in order to validate developed algorithm and verify calculation accuracy for sectorial cross-section properties and shear stresses caused by warping torsion.

Initial data for calculation are presented by Fig. 6. Results of calculation, namely sectorial coordinates diagram  $\omega$ ,  $\text{cm}^2$ , and shear stresses diagram related to the value of warping torque

$\tau_{\omega} M_{\omega}^{-1} \times 10^7 \text{ (cm}^{-3}\text{)}$  have been obtained in paper [12] and presented by Fig. 7.

Results of calculation, namely sectorial coordinates  $\omega$ , sectorial moment of inertia  $S_{\omega}$  and shear stresses  $\tau_{\omega}$  caused by the warping torque  $M_{\omega} = 10^7 \text{ kN cm}$ , have been also obtained using TONUS software and presented by Figs. 8 – 10.

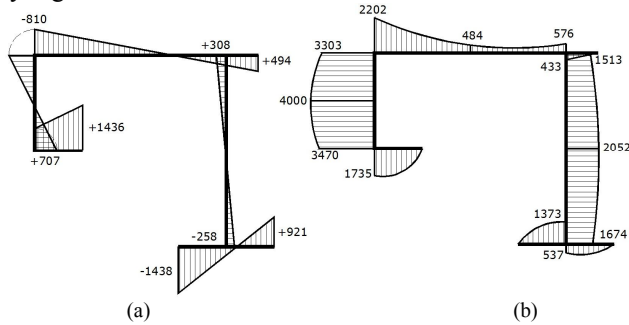


Fig. 7. Results of calculation according to [12]: (a) – sectorial coordinate diagram  $\omega$ ,  $\text{cm}^2$ ; (b) – shear stresses diagram related to the warping torque  $\tau_{\omega} M_{\omega}^{-1} \times 10^7$ ,  $\text{cm}^{-3}$

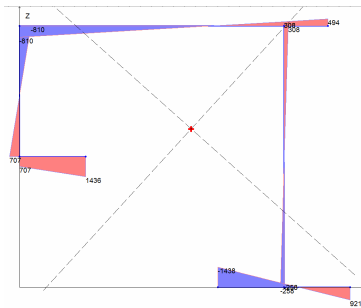


Fig. 8. Results of calculation obtained using TONUS software – sectorial coordinated diagram  $\omega$ ,  $\text{cm}^2$

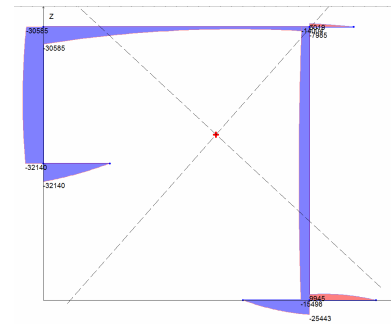


Fig. 9. Results of calculation obtained using TONUS software – sectorial moment of inertia  $S_{\omega}$ ,  $\text{cm}^4$

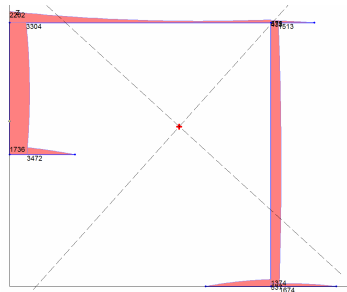


Fig. 10. Results of calculation obtained using TONUS software – modulus of shear stresses diagram  $\tau_{\omega}$  caused by warping torsion for the value of warping torque  $M_{\omega} = 10^7 \text{ kNcm}$ ,  $\text{kN/cm}^2$

Comparison for calculation results of sectorial first moment of inertia and shear stresses caused by warping torsion as well as comparison for calculation results of sectorial coordinates for considered cross-section of the thin-walled bar are presented by Tab. 1 and Tab. 2. As you can see deviations do not exceed 0,25% in all cases. It proves the validity of the results obtained using developed software.

Table 1

Comparison for calculation results of the first sectorial moment and shear stresses caused by the warping torque for considered open cross-section of the thin-walled bar

Section segment	Section point number	First sectorial moment $S_{\omega}$ , cm <sup>4</sup>			Shear stresses $\tau_{\omega}$ , kN/cm <sup>2</sup> (when $M_{\omega} = 10^7$ , kNcm)		
		[12]	TONUS	Deviation, %	[12]	TONUS	Deviation, %
1	1	32126	32140	0,04	1735	1736	0,06
1	2	0	0	0	0	0	0
2	1	32126	32140	0,04	3470	3472	0,06
2	8	30580	30585	0,02	3303	3304	0,06
3	8	30580	30585	0,02	2202	2202	0
3	4	7999	7985	0,18	576	575	0,17
4	4	6013	6019	0,1	433	432	0,23
4	5	0	0	0	0	0	0
5	4	14008	14004	0,03	1513	1513	0
5	3	15498	15498	0	1674	1674	0
6	6	0	0	0	0	0	0
6	3	25423	25443	0,08	1373	1374	0,07
7	3	9943	9945	0,02	537	537	0
7	7	0	0	0	0	0	0

Table 2

Comparison for calculation results of sectorial coordinates for considered open cross-section of the thin-walled bar

Section point number	Sectorial coordinate $\omega$ , cm <sup>2</sup>		
	[12]	TONUS	Deviation, %
1	707	707	0
2	1436	1436	0
3	-258	-258	0
4	308	308	0
5	494	494	0
6	-1438	-1438	0
7	921	921	0
8	-810	-810	0

### 5.2. Example 2: thin-walled bar with open-closed multi-contour profile.

Let us to consider an example of calculation of a thin-walled bar with open-closed multi-contour profile in order to validate developed algorithm and verify calculation accuracy for geometrical cross-section properties and shear stresses caused by warping torsion as well as shear force. Initial data for calculation are presented by Fig. 11.

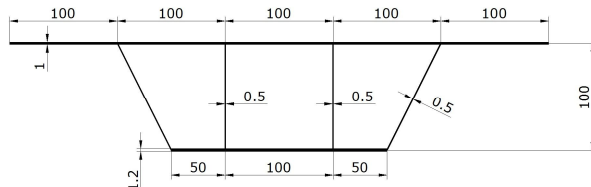


Fig. 11. Open-closed multi-contour section of the thin-walled bar with cross-sectional dimensions, cm

Calculation results, namely sectorial coordinates diagram  $\bar{\omega}$ , diagram of shear stresses caused by warping torsion related to the value of warping torque  $\tau_{\bar{\omega}} M_{\bar{\omega}}^{-1} \times 10^7$ , as well as diagram of shear stresses caused by acting of shear force related to the value of shear force  $\tau_u Q_u^{-1} \times 10^5$  have been obtained by Prokić [12] and presented by Fig. 12.

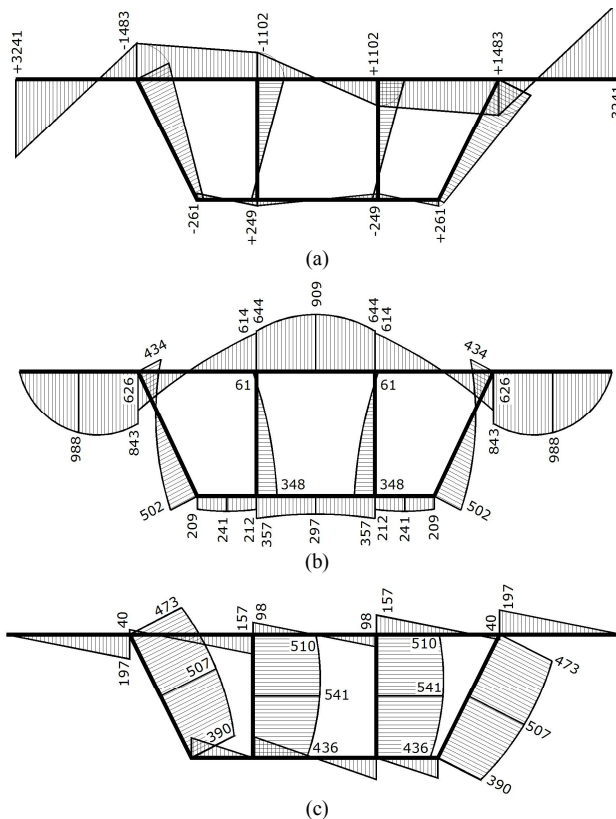


Fig. 12. Results of calculations according to [12]: (a) – sectorial coordinates diagram  $\bar{\omega}$ ,  $\text{cm}^2$ ; (b) – shear stresses diagram caused by warping torsion related to the value of the warping torque  $\tau_{\bar{\omega}} M_{\bar{\omega}}^{-1} \times 10^7$ ,  $\text{cm}^{-3}$ ; (c) – shear stresses diagram caused by shear force related to the value of shear force  $\tau_u Q_u^{-1} \times 10^5$ ,  $\text{cm}^{-2}$

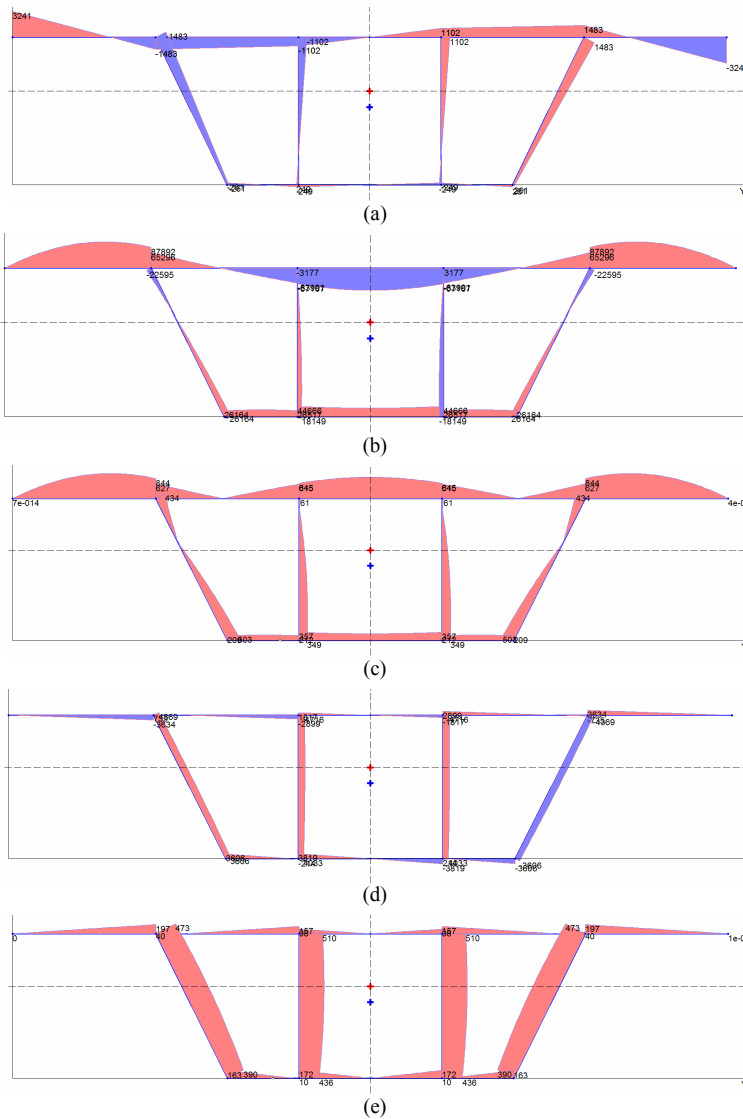


Fig. 13. Distribution diagrams obtained using TONUS software:

(a) – normalized sectorial coordinates  $\varpi$ , cm<sup>2</sup>;

(b) – first sectorial moment  $S_{\varpi}$ , cm<sup>4</sup>;

(c) – modulus of shear stresses  $\tau_{\varpi}$ , constructed depending on the value of the warping torque

$$M_{\varpi} = 10^7 \text{ kN cm, kN/cm}^2;$$

(d) – the first moment  $S_v$  relating to the principle axis  $v-v$ , cm<sup>3</sup>;

(e) – modulus of shear stresses  $\tau_u$ , constructed depending on the value of shear

$$\text{force } Q_u = 10^5 \text{ kN, kN/cm}^2$$



Table 3

Comparison for calculation results of first moments for considered open-closed multi-contour cross-section of the thin-walled bar

Section segment number	Section point number	First sectorial moment $S_{\sigma}$ , $\text{cm}^4$			First moment $S_y$ , $\text{cm}^3$		
		[12]	TONUS	Deviation, %	[12]	TONUS	Deviation, %
1	1	0	0	0	0	0	0
1	2	87776	87892	0,13	3643	3634	0,25
2	2	65181	65296	0,18	740	741	0,14
2	3	63932	64036	0,16	2903	2899	0,14
3	3	67055	67159	0,16	1812	1817	0,28
6	7	26114	26164	0,19	3595	3606	0,3
6	8	26489	26517	0,11	–	10	–
7	8	44606	44666	0,13	3816	3819	0,08
9	2	22595	22595	0	4373	4369	0,09
9	7	26135	26164	0,11	3606	3606	0
10	3	3176	3177	0,03	4715	4716	0,02
10	8	18117	18149	0,15	4031	4033	0,05

Table 4

Comparison for calculation results of shear stresses caused by the warping torque as well as by the shear force for considered open-closed multi-contour cross-section of the thin-walled bar

Section segment number	Section point number	Shear stresses $\tau_{\sigma}$ , $\text{kN/cm}^2$ (when $M_{\sigma} = 10^7$ , $\text{kNcm}$ )			Shear stresses $\tau_u$ , $\text{kN/cm}^2$ (when $Q_u = 10^5$ , $\text{kN}$ )		
		[12]	TONUS	Deviation, %	[12]	TONUS	Deviation, %
1	1	0	0	0	0	0	0
1	2	843	844	0,12	197	197	0
2	2	626	627	0,16	40	40	0
2	3	614	615	0,16	157	157	0
3	3	644	645	0,16	98	98	0
6	7	209	209	0	162	163	0,6
6	8	212	212	0	–	10	0
7	8	357	357	0	172	172	0
9	2	434	434	0	473	473	0
9	7	502	503	0,20	390	390	0
10	3	61	61	0	510	510	0
10	8	348	349	0,29	436	436	0

Table 5

Comparison for calculation results of normalized sectorial coordinate for considered open-closed multi-contour cross-section of the thin-walled bar

Section point number	Sectorial coordinate $\varpi$ , cm <sup>2</sup>		
	[12]	TONUS	Deviation, %
1	+3241	+3241	0
2	-1483	-1483	0
3	-1102	-1102	0
7	-261	-261	0
8	+249	+249	0

Calculation results, namely sectorial coordinates  $\varpi$ , static moment  $S_v$  relating to the main axes of inertia  $v-v$ , first sectorial moment  $S_{\varpi}$ , shear stresses  $\tau_u$  caused by shear force  $Q_u = 10^5$  kN as well as shear stresses  $\tau_{\varpi}$  caused by warping torque  $M_{\varpi} = 10^7$  kNcm for considered open-closed multi-contour section of the thin-walled bar have been obtained using TONUS software and presented by Fig. 13.

Comparison for calculation results of first moment  $S_v$  and first sectorial moment  $S_{\varpi}$ , comparison for calculation results of shear stresses  $\tau_u$  and  $\tau_{\varpi}$  caused by shear force  $Q_u$  and warping torque  $M_{\varpi}$  respectively as well as comparison for calculation results of sectorial coordinates  $\varpi$  for considered open-closed multi-contour cross-section of the thin-walled bar are presented by Tabs. 3 – 5. Deviations are no more than 0,3% in all design cases. It proves the validity of the results obtained using developed software.

**Conclusions.** The searching problem of shear stresses outside longitudinal edges of an arbitrary cross-section (including open-closed multi-contour cross-sections) of a thin-walled bar subjected to the general load case has been considered in the paper. The formulated problem has been transformed into a minimization problem of Castigliano's functional subject to constraints-equalities of shear forces flows equilibrium formulated for cross-section branch points as well as subject to an equilibrium equation for the whole cross-section relating to longitudinal axes of the thin-walled bar.

A detailed numerical algorithm intended to solve searching problem of shear forces flows for an arbitrary cross-section of a thin-walled bar subjected to the general loading case using the mathematical apparatus of the graph theory has been developed. The algorithm is oriented on software implementation in systems of computer-aided design of thin-walled bar structures. Developed algorithm has been implemented in SCAD Office environment by the program TONUS.

Numerical examples for calculation of the thin-walled bars with open and open-closed multi-contour cross-sections have been considered in order to validate developed algorithm and verify calculation accuracy for sectorial cross-section geometrical properties and shear stresses caused by warping torque and shear forces. Validity of the calculation results obtained using developed software has been proven by considered examples.

## REFERENCES

1. *Robert K. Dowell, Timothy P. Johnson*. Closed-form shear flow solution for box-girder bridges under torsion // *Engineering Structures*. – No. 34, 2012. – p. 383–390.
2. *Perelmuter A. V., Slivker V. I.* Numerical structural analysis: models, methods and pitfalls. – Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2003. – 600 p.
3. *Slivker V. I.* Mechanics of structural elements. Theory and applications. – Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2007. – 786 p.
4. *Lalin V. V., Rybakov V. A., Diakov S. F., Kudinov V. V., Orlova E. S.* The semi-shear theory of V. I. Slivker for the stability problems of thin-walled bars // *Magazine of Civil Engineering*. – Vol. 87, Issue 3, 2019. – p. 66–79.
5. *Yurchenko V. V.* Proyektirovaniye karkasov zdaniy iz tonkostennykh kholodnogutykh profilyev v srede SCAD Office [Designing of steel frameworks from thin-walled cold-formed profiles in SCAD Office] // *Magazine of Civil Engineering*. – No. 8, 2010. – p. 38–46. (rus)
6. *Jönsson J.* Determination of shear stresses, warping functions and section properties of thin-walled beams using finite elements // *Computer and Structures*. – No. 68, 1998. – p. 393–410.
7. *Tarjan R.* Depth-first search and linear graph algorithms // *SIAM Journal Computing*. – No. 1, 1972. – p. 146–60.
8. *Alfano G., Marotti de Sciarra F., Rosati L.* Automatic analysis of multicell thin-walled sections // *Computer and Structures*. – No. 59, 1996. – p. 641–655.
9. *Waldron P.* Sectorial properties of straight thin-walled beams // *Computers and Structures*. – Vol. 24, Issue 1, 1986. – p. 147–156.
10. *Yoo C. H.* Cross-sectional properties of thin-walled multi-cellular section // *Computer and Structures*. – No. 22, 1986. – p. 53–61.
11. *Chai H. Yoo, Junsuk Kang, Kyungsik Kim, Kyoung C. Lee.* Shear flow in thin-walled cellular sections // *Thin-Walled Structures*. – No. 49 (11), 2011. – p. 1341–1347.
12. *Prokić A.* Computer program for determination of geometrical properties of thin-walled beams with open-closed section // *Computers and Structures*. – No. 74, 2000. – p. 705–715.
13. *Gurujee C. S., Shah K. R.* A computer program for thin-walled frame analysis // *Advances in Engineering Software*. – No. 11, 1989. – p. 58–70.
14. *Gajanan K. Choudhary, Karan M. Doshi.* An algorithm for shear stress evaluation in ship hull girders // *Ocean Engineering*. – No. 108 (1), 2015. – p. 678–691.
15. *Perelmuter A., Yurchenko V.* Shear stresses in hybrid thin-walled section: development of detail numerical algorithm based on the graph theory // *Proceedings of 3<sup>rd</sup> Polish Congress of Mechanics and 21<sup>st</sup> International Conference on Computer Methods in Mechanics. Short Papers*. – Vol. 2, 2015. – p. 943–944.
16. *Yurchenko V.* Searching shear forces flows for an arbitrary cross-section of a thin-walled bar: development of numerical algorithm based on the graph theory // *International journal for computational civil and structural engineering*. – No. 15(1), 2019. – p. 153–170.
17. *Yurchenko V. V.* Rozpodil potokiv dotychnykh zusyil vzdovzh zamknykh konturiv pererizu tonkostinnoho sterzhnia: rozrobka chyslovoho alhorytmu z vykorystanniam teorii hrafiv [Distribution of shear forces flows along closed contours of a thin-walled bar section: development of numerical algorithm based on the graph theory] // *Resursoekonomni materialy, konstruktzii, budivli ta sporudy* [Resource-economic materials, structural members, buildings and structures]. Collected scientific articles. Issue 30. – Rivne, 2015. – p. 306–316. (ukr)
18. *Yurchenko V. V.* Uzahalneni sektorialni koordynaty dlia dovilnoho pererizu tonkostinnoho sterzhnia: rozrobka chyslovoho alhorytmu z vykorystanniam teorii hrafiv [Normalized sectorial coordinates for an arbitrary cross-section of a thin-walled bar: development of numerical algorithm based on the graph theory] // *Resursoekonomni materialy, konstruktzii, budivli ta sporudy* [Resource-economic materials, structural members, buildings and structures]. Collected scientific articles. Issue 31. – Rivne, 2015. – p. 538–549. (ukr)
19. *Rud' D. N., Yurchenko V. V.* Prohrammaia realizatsiya poyska potokov kasatelykh usylii v secheny tonkostennogo sterzhnia proyvolnoi konfyhuratyyi [Software implementation of searching for shear forces flows for an arbitrary cross-section of a thin-walled bar] // *Suchasni metody i problemno-orientovani kompleksy rozrakhunku konstruktzii i yikh zastosuvannia u proektuvanni i navchalnomu protsesi* [Modern methods and problem-oriented structural analysis complexes and its application in design and training]: proceedings of second international scientific and practical conference, Kyiv, 2018. – p. 109–111. (rus)

## СПИСОК ЛІТЕРАТУРЫ

1. *Dowell R. K., Johnson T. P.* Closed-form shear flow solution for box-girder bridges under torsion // *Engineering Structures*. – №34, 2012. – p. 383–390.
2. *Perelmuter A. V., Slivker V. I.* Numerical structural analysis: models, methods and pitfalls. – Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2003. – 600 p.
3. *Slivker V. I.* Mechanics of structural elements. Theory and applications. – Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2007. – 786 p.
4. *Lalin V. V., Rybakov V. A., Diakov S. F., Kudinov V. V., Orlova E. S.* The semi-shear theory of V. I. Slivker for the stability problems of thin-walled bars // *Magazine of Civil Engineering*. – № 87(3), 2019. – С. 66 – 79.
5. *Юрченко В. В.* Проектирование каркасов зданий из тонкостенных холодногнутых профилей в среде SCAD Office // *Magazine of Civil Engineering*. – №8, 2010. – С. 38 – 46.
6. *Jönsson J.* Determination of shear stresses, warping functions and section properties of thin-walled beams using finite elements // *Computer and Structures*. – No. 68, 1998. – p. 393–410.
7. *Tarjan R.* Depth-first search and linear graph algorithms // *SIAM Journal Computing*. – №1, 1972. – p. 146 – 60.
8. *Alfano G., Marotti de Sciarra F., Rosati L.* Automatic analysis of multicell thin-walled sections // *Computer and Structures*. – №59, 1996. p. 641 – 55.
9. *Waldron P.* Sectorial properties of straight thin-walled beams // *Computers and Structures*. – Vol. 24, Issue 1, 1986. – p. 147 – 156.
10. *Yoo C. H.* Cross-sectional properties of thin-walled multi-cellular section // *Computer and Structures*. – №22, 1986. – p. 53–61.
11. *Chai H.Yoo, Junsuk Kang, Kyungsik Kim, Kyoung C. Lee.* Shear flow in thin-walled cellular sections // *Thin-Walled Structures*. – №49 (11), 2011. – p. 1341–1347.
12. *Prokić A.* Computer program for determination of geometrical properties of thin-walled beams with open-closed section // *Computers and Structures*. – №74, 2000. – p. 705–715.
13. *Gurujee C. S., Shah K. R.* A computer program for thin-walled frame analysis // *Advances in Engineering Software*. – No. 11, 1989. – p. 58 – 70.
14. *Gajanan K.Choudhary, Karan M. Doshi.* An algorithm for shear stress evaluation in ship hull girders // *Ocean Engineering*. – №108 (1), 2015. – p. 678–691.
15. *Perelmuter A., Yurchenko V.* Shear stresses in hybrid thin-walled section: development of detail numerical algorithm based on the graph theory // *Proceedings of 3<sup>rd</sup> Polish Congress of Mechanics and 21<sup>st</sup> International Conference on Computer Methods in Mechanics. Short Papers*. – Vol. 2, 2015. – p. 943 – 944.
16. *Yurchenko V.* Searching shear forces flows for an arbitrary cross-section of a thin-walled bar: development of numerical algorithm based on the graph theory // *International journal for computational civil and structural engineering*. – №15(1), 2019. – p. 153 – 170.
17. *Юрченко В. В.* Розподіл потоків дотичних зусиль вздовж замкнених контурів перерізу тонкостінного стержня: розробка числового алгоритму з використанням теорії графів // *Ресурсоекономічні матеріали, конструкції, будівлі та споруди. Збірник наукових праць*. Вип. 30. – Рівне, 2015. – С. 306 – 316.
18. *Юрченко В. В.* Узагальнені секторіальні координати для довільного перерізу тонкостінного стержня: розробка числового алгоритму з використанням теорії графів // *Ресурсоекономічні матеріали, конструкції, будівлі та споруди. Збірник наукових праць*. Вип. 31. – Рівне, 2015. – С. 538 – 549.
19. *Рудь Д. Н., Юрченко В. В.* Программная реализация поиска потоков касательных усилий в сечении тонкостенного стержня произвольной конфигурации // *Сучасні методи і проблемно-орієнтовані комплекси розрахунку конструкцій і їх застосування у проектуванні і навчальному процесі: Тези доповідей другої міжнародної науково-практичної конференції, Київ, 2018.* – С. 109 – 111.

Стаття надійшла 21.08.2019

*Yurchenko V. V.*

### **SEARCHING FOR SHEAR FORCES FLOWS IN ARBITRARY CROSS-SECTIONS OF THIN-WALLED BARS: DEVELOPMENT OF NUMERICAL ALGORITHM**

Development of a general computer program for the design and verification of thin-walled bar structural members remains an actual task. Despite the prevailing influence of normal stresses on the stress-strain state of thin-walled bars design and verification of thin-walled structural members should be performed taking into account not only normal stresses, but also shear stresses.

Therefore, in the paper a thin-walled bar of an arbitrary cross-section which is undergone to the general load case is considered as investigated object. The main research question is development of mathematical support and knoware for numerical solution for the shear stresses problem with orientation on software implementation in a computer-aided design system for thin-walled bar structures.

The problem of shear stresses outside longitudinal edges of an arbitrary cross-section (including open-closed multi-contour cross-sections) of a thin-walled bar subjected to the general load case has been considered in the paper. The formulated problem has been reduced to the searching problem for unknown shear forces flows that have the least value of the Castigliano's functional. Besides, constraints-equalities of shear forces flows equilibrium formulated for cross-section branch points, as well as equilibrium equation formulated for the whole cross-section relating to longitudinal axes of the thin-walled bar have been taken into account.

A detailed numerical algorithm intended to solve the formulated problem has been proposed by the paper. The algorithm is oriented on software implementation in systems of computer-aided design of thin-walled bar structures. Developed algorithm has been implemented in SCAD Office environment by the program TONUS. Numerical examples for calculation of thin-walled bars with open and open-closed multi-contour cross-sections have been considered in order to validate developed algorithm and verify calculation accuracy for sectorial cross-section geometrical properties and shear stresses caused by warping torque and shear forces. Validity of the calculation results obtained using developed software has been proven by considered examples.

**Keywords:** thin-walled bar, arbitrary cross-section, shear forces flow, closed contour, graph theory, Castigliano's functional, mathematical programming task, method of Lagrange multipliers, algorithm, software implementation.

*Юрченко В. В.*

### **ПОШУКОВИЙ АЛГОРИТМ ВИЗНАЧЕННЯ ПОТОКІВ ДОТИЧНИХ ЗУСИЛЬ ДЛЯ ДОВІЛЬНОГО ПЕРЕРІЗУ ТОНКОСТІННОГО СТЕРЖНЯ**

Розробка універсального програмного комплексу для розрахунку та проектування тонкостінних стержневих елементів конструкцій наясодні залишається актуальною задачею. Не дивлячись на визначальний вплив нормальних напружень на напружено-деформований стан тонкостінних стержнів, перевірка несучої здатності таких елементів повинна виконуватись, беручи до уваги також і значення дотичних напружень.

У зв'язку з цим розглянута задача пошуку значень потоків дотичних зусиль для довільного перерізу (відкрито-замкнутого багатоконтурного) тонкостінного стержня для загального випадку навантаження. Сформульована задача зведена до задачі математичного програмування, а саме до задачі пошуку невідомих потоків дотичних напружень, що забезпечують найменше значення функціоналу Кастільяно при задоволенні обмежень рівноваги потоків у точках розгалуження перерізу, а також при задоволенні рівняння рівноваги усього перерізу тонкостінного стержня відносно поздовжньої осі.

Розроблений детальний алгоритм числового розв'язку сформульованої задачі з використанням математичного апарату теорії графів, орієнтований на програмну реалізацію в системах автоматизованого проектування тонкостінних стержневих систем. Виконана програмна реалізація розробленого алгоритму у середовищі обчислювального комплексу SCAD Office у програмі TONUS.

З метою верифікації розробленого алгоритму та перевірки точності обчислень геометричних характеристик перерізу та дотичних напружень у ньому розглянуті приклади розрахунку тонкостінних стержневих елементів відкритого та відкрито-замкнутого багатоконтурного перерізів. На розглянутих прикладах доведена достовірність результатів, отримуваних за допомогою розробленого програмного забезпечення.

**Ключові слова:** тонкостінний стержень, довільний переріз, потоки дотичних зусиль, замкнутий контур, теорія графів, функціонал Кастільяно, задача математичного програмування, метод множників Лагранжа, алгоритм, програмна реалізація.

Юрченко В. В.

### **ПОИСКОВЫЙ АЛГОРИТМ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПОТОКОВ КАСАТЕЛЬНЫХ УСИЛИЙ ДЛЯ ПРОИЗВОЛЬНЫХ СЕЧЕНИЙ ТОНКОСТЕННЫХ СТЕРЖНЕЙ**

Разработка универсального программного комплекса для расчета и проектирования тонкостенных стержневых элементов конструкций остается актуальной задачей. Несмотря на преобладающее влияние нормальных напряжений на напряженно-деформированное состояние тонкостенных стержней, проверка несущей способности таких элементов должна выполняться, принимая во внимание также и значения касательных напряжений.

В связи с этим рассмотрена задача поиска значений потоков касательных усилий для произвольного сечения (открыто-замкнутого многоконтурного сечения) тонкостенного стержня для общего случая нагружения. Сформулированная задача приведена к задаче математического программирования, а именно к задаче поиска значений неизвестных потоков касательных напряжений, обеспечивающих наименьшее значение функционала Кастильяно при удовлетворении ограничений равновесия потоков в точках ветвления сечения, а также при удовлетворении уравнения равновесия всего сечения тонкостенного стержня относительно продольной оси.

Разработан детальный алгоритм численного решения сформулированной задачи с использованием математического аппарата теории графов, ориентированный на программную реализацию в системах автоматизированного проектирования тонкостенных стержневых систем. Выполнена программная реализация разработанного алгоритма в среде вычислительного комплекса SCAD Office в программе ТОНУС.

С целью верификации разработанного алгоритма и проверки точности вычислений геометрических характеристик и касательных напряжений рассмотрены примеры расчета тонкостенных стержневых элементов открытого и открыто-замкнутого многоконтурного сечений. На рассмотренных примерах доказана достоверность результатов, получаемых при использовании разработанного программного обеспечения.

**Ключевые слова:** тонкостенный стержень, произвольное сечение, потоки касательных усилий, замкнутый контур, теория графов, функционал Кастильяно, задача математического программирования, метод множителей Лагранжа, алгоритм, программная реализация

УДК 624.014

*Юрченко В. В. Пошуковий алгоритм визначення потоків дотичних зусиль для довільного перерізу тонкостінного стержня та його програмна реалізація // Опір матеріалів і теорія споруд: наук.-тех. збірн. – К.: КНУБА, 2019. – Вип. 103. – С. 82–111.*

*Розглянута задача пошуку потоків дотичних зусиль у довільному перерізі тонкостінного стержня для загального випадку навантаження. Розроблений детальний алгоритм числового розв'язку сформульованої задачі та виконана його програмна реалізація. На розглянутих прикладах розрахунку тонкостінних стержневих елементів відкритого та відкрито-замкнутого багатоконтурного перерізу доведена достовірність результатів, отримуваних за допомогою розробленого програмного забезпечення.*

Лл. 13. Табл. 5. Бібліог. 19 назв.

UDC 624.014

*Yurchenko V. V. Searching for shear forces flows in arbitrary cross-sections of thin-walled bars: numerical algorithm and software implementation // Strength of Materials and Theory of Structures: Scientific-and-technical collected articles – Kyiv: KNUBA, 2019. – Issue 103. – P. 82–111.*

*The problem of shear stresses outside longitudinal edges of an arbitrary cross-section of a thin-walled bar subjected to the general load case has been considered. A detailed numerical algorithm intended to solve the formulated problem has been proposed and has been implemented by the software. Validity of the calculation results obtained using developed software has been proven by considered numerical examples for calculation of thin-walled bars with open and open-closed multi-contour cross-sections.*

Fig. 13. Tab. 5. Ref. 19.

УДК 624.014

*Юрченко В. В. Поисковый алгоритм определения потоков касательных усилий для произвольных сечений тонкостенных стержней и его программная реализация // Сопrotивление материалов и теория сооружений: науч.- тех. сборн. – К.: КНУСА, 2019. – Вып. 103. – С. 82–111.*

*Рассмотрена задача поиска потоков касательных усилий в произвольном сечении тонкостенного стержня для общего случая загрузки. Разработан детальный алгоритм численного решения сформулированной задачи и выполнена его программная реализация. На рассмотренных примерах расчета тонкостенных стержневых элементов открытого и открыто-замкнутого многоконтурного сечений доказана достоверность результатов, получаемых с использованием разработанного программного обеспечения.*

*Ил. 13. Табл. 5. Библиог. 19 назв.*

**Автор:** кандидат технічних наук, доцент кафедри металевих та дерев'яних конструкцій  
*Юрченко Віталіна Віталіївна*

**Адреса:** 03680 Україна, м. Київ, Повітрофлотський пр. 31, Київський національний університет будівництва і архітектури

**Робочий тел.:** +38(044)249-71-91

**Мобільний тел.:** +38(063)89-26-491

**Імейл:** [vitalina@scadsoft.com](mailto:vitalina@scadsoft.com)

**ORCID ID:** <https://orcid.org/0000-0003-4513-809X>

УДК 693.546

## ДИНАМІЧНЕ ЗРІВНОВАЖЕННЯ ПРИВІДНОГО МЕХАНІЗМУ РОЛИКОВОЇ ФОРМУВАЛЬНОЇ УСТАНОВКИ З ЕНЕРГЕТИЧНО ВРІВНОВАЖЕНИМ ПРИВОДОМ

**В.С. Ловейкін<sup>1</sup>**,  
докт. техн. наук, професор

**К.І. Почка<sup>2</sup>**,  
канд. техн. наук, доцент

**М.О. Пристайло<sup>2</sup>**,  
канд. техн. наук, доцент

**О.Б. Почка<sup>2</sup>**,

<sup>1</sup>*Національний університет біоресурсів і природокористування України,  
вул. Героїв Оборони, 15, м. Київ, Україна, 03041*

<sup>2</sup>*Київський національний університет будівництва і архітектури  
Повітрофлотський просп., 31, м. Київ, Україна, 03037*

DOI: 10.32347/2410-2547.2019.103.112-130

Для роликової формувальної установки з енергетично зрівноваженим приводом розглянуто динамічне зрівноваження привідного механізму. При моделюванні процесу зрівноваження привідного механізму розв'язано дві задачі динамічного зрівноваження: зрівноваження сил інерції, що прикладені в центрах мас рухомих ланок, та зрівноваження приведеного до осі обертання приводного вала крутного моменту, що виникає від дії сил інерції. Неврівноваженість привідного механізму оцінюється максимальними і середньоквадратичними значеннями сумарної сили інерції та крутного сумарного моменту від дії сил інерції, безрозмірними коефіцієнтами, що виражають відношення середньоквадратичних значень зведених до центру мас установки сумарної сили інерції та сил інерції, що діють на кожний візок, і відношення середньоквадратичних значень моменту від дії сил інерції всього механізму і складових моменту від дії сил інерції окремих елементів.

**Ключові слова:** роликова формувальна установка, привідний механізм, сила інерції, момент, зрівноваження.

**Постановка задачі.** В існуючих установках поверхневого ущільнення залізобетонних виробів використовується кривошипно-повзунний або гідравлічний привод зворотно-поступального руху формувального візка з уководувальними роликами [1-4]. Під час постійних пускогальмівних режимів руху виникають значні динамічні навантаження в елементах приводного механізму та в елементах формувального візка, що може привести до передчасного виходу установки з ладу. В існуючих теоретичних та експериментальних дослідженнях машин роликового формування залізобетонних виробів обґрунтовано їхні конструктивні параметри та продуктивність [1-4]. Разом з тим, недостатньо уваги приділено дослідженню діючим динамічним навантаженням [5] та режимам руху, що в значній мірі впливає на роботу установки та на якість готової продукції.

**Огляд публікацій.** В існуючих теоретичних та експериментальних дослідженнях машин роликового формування залізобетонних виробів обґрунтовано їхні конструктивні параметри та продуктивність [1-4]. Разом



з тим недостатньо уваги приділено дослідженню діючих динамічних навантажень та режимів руху, що в значній мірі впливає на роботу установки та якість готової продукції. Під час постійних пускогальмівних режимів руху формувального візка в елементах установки крім сил тяжіння та сил опору виникають також сили інерції [6-14], що створюють додаткові навантаження на привідний механізм. Тому актуальною є задача зрівноваження привідного механізму машин роликowego формування.

**Мета роботи.** Метою даної роботи є динамічне зрівноваження привідного механізму роликовой формувальної установки з енергетично зрівноваженим приводом.

**Виклад основного матеріалу дослідження.** З метою зменшення витрат енергії в машинах роликowego формування запропоновано конструкцію роликовой формувальної установки [15, 16] для забезпечення ущільнення залізобетонних виробів на одній технологічній лінії, яка складається з трьох формувальних візків, розташованих паралельно між собою з однієї сторони привідного валу, що приводяться в зворотно-поступальний рух від спільного приводу, до складу якого входять три кривошипно-повзунні механізми, кривошипи яких жорстко закріплені на одному привідному валу та зміщені між собою на кут  $\Delta\varphi = 120^0$  (рис. 1(а)). Кожний з формувальних візків 1, 2 та 3 змонтовані на порталі 11 і здійснюють зворотно-поступальний рух в напрямних 12 над порожньою форми 13. Формувальний візок 1 складається з подавального бункера 14 та з співвісних секцій укочувальних роликів 15. Таку ж конструкцію мають і інші два візка. Візки 1, 2 і 3 з розподільними бункерами приводяться в зворотно-поступальний рух за допомогою приводу, виконаного у вигляді трьох кривошипно-повзунних механізмів, кривошипи 7, 8 та 9 яких жорстко закріплені на одному приводному валу 10 і зміщені між собою на кут  $\Delta\varphi = 120^0$ . Шатунні 4, 5 та 6 шарнірно з'єднані з формувальними візками 1, 2 та 3, а іншими кінцями з'єднуються з кривошипами 7, 8 та 9. Така конструкція формувальної установки дозволяє зменшити динамічні навантаження в елементах привідного механізму, зменшити зайві руйнівні навантаження на рамну конструкцію і, відповідно, підвищити довговічність установки в цілому. На рис. 1(б) зображено кінематичну схему роликовой формувальної установки з енергетично зрівноваженим приводом для формування залізобетонних виробів на одній технологічній лінії. На даній кінематичній схемі  $r$  – радіус кривошипів 7, 8 та 9;  $l$  – довжина шатунів 4, 5 та 6;  $\varphi$  – кутова координата положення кривошипа першого візка;  $\Delta\varphi$  – кут зміщення кривошипів 7 і 8, 8 і 9 та 9 і 7 між собою;  $x_1$ ,  $x_2$  та  $x_3$  – координати центрів мас візків 1, 2 та 3 відповідно;  $\beta_1$ ,  $\beta_2$  та  $\beta_3$  – кутові координати, що визначають положення шатунів першого, другого та третього візків відносно горизонталі.

З рис. 1 визначаємо координати центрів мас візків 1, 2 та 3 [16]:

$$\begin{aligned} x_1 &= r \cdot \cos \varphi + l \cdot \cos \beta_1; & x_2 &= r \cdot \cos(\varphi + \Delta\varphi) + l \cdot \cos \beta_2; \\ x_3 &= r \cdot \cos(\varphi + 2\Delta\varphi) + l \cdot \cos \beta_3. \end{aligned} \quad (1)$$

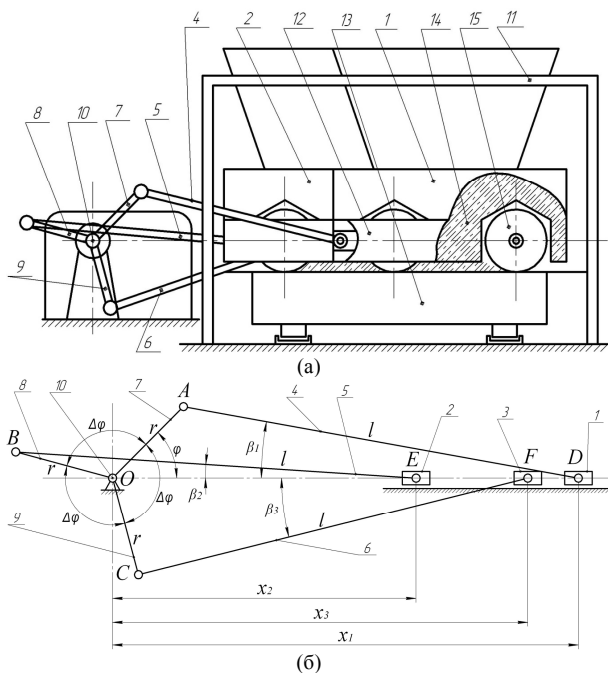


Рис. 1. Роликова формувальна установка з енергетично рівноважним приводом (а) та її кінематична схема (б)

Оскільки кути  $\beta_1$ ,  $\beta_2$  та  $\beta_3$  невідомі, їх можна визначити в залежності від довжини шатуну  $l$ , радіуса кривошипа  $r$ , кутової координати кривошипа  $\varphi$  та кута зміщення кривошипів  $\Delta\varphi$  [16]:

$$r \cdot \sin \varphi = l \cdot \sin \beta_1 \rightarrow \sin \beta_1 = \frac{r}{l} \cdot \sin \varphi ;$$

$$r \cdot \sin(\varphi + \Delta\varphi) = l \cdot \sin \beta_2 \rightarrow \sin \beta_2 = \frac{r}{l} \cdot \sin(\varphi + \Delta\varphi) ;$$

$$r \cdot \sin(\varphi + 2\Delta\varphi) = l \cdot \sin \beta_3 \rightarrow \sin \beta_3 = \frac{r}{l} \cdot \sin(\varphi + 2\Delta\varphi) .$$

Звідси

$$\cos \beta_1 = \sqrt{1 - \sin^2 \beta_1} = \sqrt{1 - \frac{r^2}{l^2} \cdot \sin^2 \varphi} ;$$

$$\cos \beta_2 = \sqrt{1 - \sin^2 \beta_2} = \sqrt{1 - \frac{r^2}{l^2} \cdot \sin^2(\varphi + \Delta\varphi)} ;$$

$$\cos \beta_3 = \sqrt{1 - \sin^2 \beta_3} = \sqrt{1 - \frac{r^2}{l^2} \cdot \sin^2(\varphi + 2\Delta\varphi)} .$$

Тоді

$$\begin{aligned}x_1 &= r \cdot \cos \varphi + l \cdot \sqrt{1 - (r^2/l^2) \cdot \sin^2 \varphi}; \\x_2 &= r \cdot \cos(\varphi + \Delta\varphi) + l \cdot \sqrt{1 - (r^2/l^2) \cdot \sin^2(\varphi + \Delta\varphi)}; \\x_3 &= r \cdot \cos(\varphi + 2\Delta\varphi) + l \cdot \sqrt{1 - (r^2/l^2) \cdot \sin^2(\varphi + 2\Delta\varphi)}.\end{aligned}\quad (2)$$

З виразів (2) отримуємо функції зміни швидкостей центрів мас формувальних візків:

$$\dot{x}_1 = \dot{\varphi} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial \varphi}; \quad \dot{x}_2 = \dot{\varphi} \cdot \frac{\partial x_2}{\partial \varphi}; \quad \dot{x}_3 = \dot{\varphi} \cdot \frac{\partial x_3}{\partial \varphi}, \quad (3)$$

де  $\dot{\varphi} = \omega$  – кутова швидкість обертання кривошипів;  $\frac{\partial x_1}{\partial \varphi}$ ,  $\frac{\partial x_2}{\partial \varphi}$ ,  $\frac{\partial x_3}{\partial \varphi}$  – перші передаточні функції центрів мас відповідно візків 1, 2 та 3, які визначаються наступними виразами [16]:

$$\frac{\partial x_1}{\partial \varphi} = -r \cdot \sin \varphi \cdot \left( 1 + \frac{r}{l} \cdot \frac{\cos \varphi}{\sqrt{1 - (r^2/l^2) \cdot \sin^2 \varphi}} \right); \quad (4)$$

$$\frac{\partial x_2}{\partial \varphi} = -r \cdot \sin(\varphi + \Delta\varphi) \cdot \left( 1 + \frac{r}{l} \cdot \frac{\cos(\varphi + \Delta\varphi)}{\sqrt{1 - (r^2/l^2) \cdot \sin^2(\varphi + \Delta\varphi)}} \right); \quad (4)$$

$$\frac{\partial x_3}{\partial \varphi} = -r \cdot \sin(\varphi + 2\Delta\varphi) \cdot \left( 1 + \frac{r}{l} \cdot \frac{\cos(\varphi + 2\Delta\varphi)}{\sqrt{1 - (r^2/l^2) \cdot \sin^2(\varphi + 2\Delta\varphi)}} \right).$$

Функції зміни лінійних прискорень центрів мас візків 1, 2 та 3 визначаються залежностями:

$$\ddot{x}_1 = \ddot{\varphi} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial \varphi} + \dot{\varphi}^2 \cdot \frac{\partial^2 x_1}{\partial \varphi^2}; \quad \ddot{x}_2 = \ddot{\varphi} \cdot \frac{\partial x_2}{\partial \varphi} + \dot{\varphi}^2 \cdot \frac{\partial^2 x_2}{\partial \varphi^2}; \quad \ddot{x}_3 = \ddot{\varphi} \cdot \frac{\partial x_3}{\partial \varphi} + \dot{\varphi}^2 \cdot \frac{\partial^2 x_3}{\partial \varphi^2}, \quad (5)$$

де  $\ddot{\varphi} = \varepsilon$  – кутове прискорення кривошипів;  $\frac{\partial^2 x_1}{\partial \varphi^2}$ ,  $\frac{\partial^2 x_2}{\partial \varphi^2}$ ,  $\frac{\partial^2 x_3}{\partial \varphi^2}$  – другі передаточні функції центрів мас відповідно візків 1, 2 та 3, що визначаються наступними виразами [16]:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 x_1}{\partial \varphi^2} &= -r \cdot \left[ \cos \varphi \cdot \left( 1 + \frac{r}{l} \cdot \frac{\cos \varphi}{\sqrt{1 - (r^2/l^2) \cdot \sin^2 \varphi}} \right) + \frac{r}{l} \cdot \sin^2 \varphi \cdot \frac{\left( (r^2/l^2) \cdot \cos^2 \varphi - 1 \right)}{\left( 1 - (r^2/l^2) \cdot \sin^2 \varphi \right)^{3/2}} \right]; \\ \frac{\partial^2 x_2}{\partial \varphi^2} &= -r \cdot \left[ \cos(\varphi + \Delta\varphi) \cdot \left( 1 + \frac{r}{l} \cdot \frac{\cos(\varphi + \Delta\varphi)}{\sqrt{1 - (r^2/l^2) \cdot \sin^2(\varphi + \Delta\varphi)}} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{r}{l} \cdot \sin^2(\varphi + \Delta\varphi) \cdot \frac{\left( (r^2/l^2) \cdot \cos^2(\varphi + \Delta\varphi) - 1 \right)}{\left( 1 - (r^2/l^2) \cdot \sin^2(\varphi + \Delta\varphi) \right)^{3/2}} \right];\end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 x_3}{\partial \varphi^2} = -r \cdot \left[ \cos(\varphi + 2\Delta\varphi) \cdot \left( 1 + \frac{r}{l} \cdot \frac{\cos(\varphi + 2\Delta\varphi)}{\sqrt{1 - (r^2/l^2) \cdot \sin^2(\varphi + 2\Delta\varphi)}} \right) + \frac{r}{l} \cdot \sin^2(\varphi + 2\Delta\varphi) \cdot \frac{\left( (r^2/l^2) \cdot \cos^2(\varphi + 2\Delta\varphi) - 1 \right)}{\left( 1 - (r^2/l^2) \cdot \sin^2(\varphi + 2\Delta\varphi) \right)^{3/2}} \right]. \quad (6)$$

Кінетична енергія всієї системи визначається як сума кінетичних енергій складових привідного механізму та формувальних візків:

$$T = \frac{J_p \cdot \dot{\varphi}^2}{2} + \frac{m_1 \cdot \dot{x}_1^2}{2} + \frac{m_2 \cdot \dot{x}_2^2}{2} + \frac{m_3 \cdot \dot{x}_3^2}{2} + \frac{J_{S_4} \cdot \dot{\beta}_1^2}{2} + \frac{m_4 \cdot (\dot{x}_{S_4}^2 + \dot{y}_{S_4}^2)}{2} + \frac{J_{S_5} \cdot \dot{\beta}_2^2}{2} + \frac{m_5 \cdot (\dot{x}_{S_5}^2 + \dot{y}_{S_5}^2)}{2} + \frac{J_{S_6} \cdot \dot{\beta}_3^2}{2} + \frac{m_6 \cdot (\dot{x}_{S_6}^2 + \dot{y}_{S_6}^2)}{2}, \quad (7)$$

де  $J_p$  – зведений до осі обертання привідного вала момент інерції привідного механізму (із врахуванням ротора двигуна, передавального механізму та з'єднувальних муфт);  $m_1$ ,  $m_2$  та  $m_3$  – маси формувальних візків 1, 2 та 3 відповідно (маси формувальних візків рівні  $m_1 = m_2 = m_3 = m$ );  $m_4$ ,  $m_5$ ,  $m_6$ ,  $J_{S_4}$ ,  $J_{S_5}$  та  $J_{S_6}$  – маси шатунів 4, 5 і 6 та їхні власні моменти інерції відносно центрів мас;  $\dot{\beta}_1$ ,  $\dot{\beta}_2$  та  $\dot{\beta}_3$  – кутові швидкості шатунів 4, 5 та 6;  $\dot{x}_{S_4}$ ,  $\dot{y}_{S_4}$ ,  $\dot{x}_{S_5}$ ,  $\dot{y}_{S_5}$ ,  $\dot{x}_{S_6}$  та  $\dot{y}_{S_6}$  – лінійні швидкості центрів мас шатунів 4, 5 та 6.

Оскільки маси шатунів 4, 5 та 6 значно менші за маси формувальних візків 1, 2 та 3, то можемо знехтувати цими масами і, відповідно, нехтуємо кінетичною енергією вказаних шатунів. Тоді значення кінетичної енергії установки будемо мати у вигляді:

$$T = \frac{J_p \cdot \dot{\varphi}^2}{2} + \frac{m \cdot \dot{x}_1^2}{2} + \frac{m \cdot \dot{x}_2^2}{2} + \frac{m \cdot \dot{x}_3^2}{2} = \frac{J_p \cdot \dot{\varphi}^2}{2} + \frac{m}{2} \cdot \left[ \dot{\varphi}^2 \cdot \left( \frac{\partial x_1}{\partial \varphi} \right)^2 + \dot{\varphi}^2 \cdot \left( \frac{\partial x_2}{\partial \varphi} \right)^2 + \dot{\varphi}^2 \cdot \left( \frac{\partial x_3}{\partial \varphi} \right)^2 \right], \quad (8)$$

або

$$T = \frac{\dot{\varphi}^2}{2} \cdot \left\{ J_p + m \cdot \left[ \left( \frac{\partial x_1}{\partial \varphi} \right)^2 + \left( \frac{\partial x_2}{\partial \varphi} \right)^2 + \left( \frac{\partial x_3}{\partial \varphi} \right)^2 \right] \right\}. \quad (9)$$

Складемо рівняння руху роликової формувальної установки. Для цього використаємо рівняння Лагранжа другого роду:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = Q_\varphi, \quad (10)$$

де  $t$  – час;  $\varphi$  – кутова координата положення кривошипа, яка прийнята за узагальнену координату;  $Q_\varphi$  – узагальнена сила, яка відповідає цій узагальненій координаті.

Узагальнена сила визначається залежністю:

$$Q_\varphi = M_p - F_{O1} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial \varphi} - F_{O2} \cdot \frac{\partial x_2}{\partial \varphi} - F_{O3} \cdot \frac{\partial x_3}{\partial \varphi}. \quad (11)$$

Тут  $F_{O1}$ ,  $F_{O2}$  та  $F_{O3}$  – сили опору переміщенню формувальних візків 1, 2 та 3;  $M_p$  – рушійний момент привідного двигуна, зведений до осі обертання кривошипа, який визначається за формулою Клосса:

$$M_p = \frac{2 \cdot M_{кр}}{s/s_{кр} + s_{кр}/s} \cdot u \cdot \eta; \quad (12)$$

$$s = 1 - \frac{\omega}{\omega_0} = 1 - \frac{\dot{\varphi} \cdot u}{\omega_0}; \quad (13)$$

$$s_{кр} = 1 - \frac{\omega_{кр}}{\omega_0}, \quad (14)$$

де  $M_{кр}$  – критичний момент на валу двигуна;  $s$  та  $s_{кр}$  – ковзання та його критичне значення;  $\omega$  та  $\omega_0$  – кутова швидкість ротора двигуна та її синхронне значення;  $u$  – передаточне число передавального механізму від двигуна до приводного вала;  $\eta$  – ККД привідного механізму.

Після підстановки залежностей (9) та (11)-(14) в рівняння (10), отримаємо:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \varphi} &= \dot{\varphi}^2 \cdot m \cdot \left( \frac{\partial x_1}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial^2 x_1}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial x_2}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial^2 x_2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial x_3}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial^2 x_3}{\partial \varphi^2} \right); \\ \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} &= \dot{\varphi} \cdot \left\{ J_p + m \cdot \left[ \left( \frac{\partial x_1}{\partial \varphi} \right)^2 + \left( \frac{\partial x_2}{\partial \varphi} \right)^2 + \left( \frac{\partial x_3}{\partial \varphi} \right)^2 \right] \right\}; \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} &= \ddot{\varphi} \cdot \left\{ J_p + m \cdot \left[ \left( \frac{\partial x_1}{\partial \varphi} \right)^2 + \left( \frac{\partial x_2}{\partial \varphi} \right)^2 + \left( \frac{\partial x_3}{\partial \varphi} \right)^2 \right] \right\} + \\ &+ 2 \cdot \dot{\varphi}^2 \cdot m \cdot \left( \frac{\partial x_1}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial^2 x_1}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial x_2}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial^2 x_2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial x_3}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial^2 x_3}{\partial \varphi^2} \right); \\ &\ddot{\varphi} \cdot \left\{ J_p + m \cdot \left[ \left( \frac{\partial x_1}{\partial \varphi} \right)^2 + \left( \frac{\partial x_2}{\partial \varphi} \right)^2 + \left( \frac{\partial x_3}{\partial \varphi} \right)^2 \right] \right\} + \\ &+ \dot{\varphi}^2 \cdot m \cdot \left( \frac{\partial x_1}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial^2 x_1}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial x_2}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial^2 x_2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial x_3}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial^2 x_3}{\partial \varphi^2} \right) = \end{aligned}$$

$$= \frac{2 \cdot M_{kp}}{1 - (\dot{\varphi} \cdot u / \omega_0) + \frac{1 - \omega_{kp} / \omega_0}{1 - \omega_{kp} / \omega_0}} \cdot u \cdot \eta - F_{O1} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial \varphi} - F_{O2} \cdot \frac{\partial x_2}{\partial \varphi} - F_{O3} \cdot \frac{\partial x_3}{\partial \varphi}. \quad (15)$$

Отримане рівняння являє собою нелінійне рівняння другого порядку, яке необхідно розв'язувати чисельним методом. В результаті розв'язку рівняння (15) отримуємо залежності [17]:

$$\varphi = \varphi(t); \quad \dot{\varphi} = \dot{\varphi}(t); \quad \ddot{\varphi} = \ddot{\varphi}(t). \quad (16)$$

При динамічному аналізі швидкохідних механізмів, до яких відноситься роликівна формувальна установка, необхідно розв'язувати дві задачі динамічного врівноваження:

1. врівноваження сил інерції, що прикладені в центрах мас рухомих ланок;

2. врівноваження приведеного до осі обертання приводного вала крутного моменту, що виникає від дії сил інерції.

Для вирішення першої задачі необхідно, щоб центр мас рухомих ланок роликівної формувальної установки (формувальних візків) не зміщувався, тобто для роликівної формувальної установки, візки якої рухаються вздовж осі  $x$ , повинна виконуватись умова:

$$x_c = \frac{m_1 \cdot x_1 + m_2 \cdot x_2 + m_3 \cdot x_3}{m_1 + m_2 + m_3} = \text{const}. \quad (17)$$

Диференціюючи двічі за часом залежність (17), отримаємо:

$$\ddot{x}_c = \frac{m_1 \cdot \ddot{x}_1 + m_2 \cdot \ddot{x}_2 + m_3 \cdot \ddot{x}_3}{m_1 + m_2 + m_3} = 0. \quad (18)$$

Вираз (18) можна записати в наступному вигляді:

$$F_{ic} = m_1 \cdot \ddot{x}_1 + m_2 \cdot \ddot{x}_2 + m_3 \cdot \ddot{x}_3 = m_1 \left( \ddot{\varphi} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial \varphi} + \dot{\varphi}^2 \cdot \frac{\partial^2 x_1}{\partial \varphi^2} \right) + m_2 \left( \ddot{\varphi} \cdot \frac{\partial x_2}{\partial \varphi} + \dot{\varphi}^2 \cdot \frac{\partial^2 x_2}{\partial \varphi^2} \right) + m_3 \left( \ddot{\varphi} \cdot \frac{\partial x_3}{\partial \varphi} + \dot{\varphi}^2 \cdot \frac{\partial^2 x_3}{\partial \varphi^2} \right) = 0, \quad (19)$$

де  $F_{ic}$  – сумарна сила інерції, зведена до центра мас рухомих ланок установки від дії сил інерції окремих візків.

Якщо врахувати, що  $m_1 = m_2 = m_3 = m$ , то будемо мати:

$$F_{ic} = m \cdot \left[ \ddot{\varphi} \cdot \left( \frac{\partial x_1}{\partial \varphi} + \frac{\partial x_2}{\partial \varphi} + \frac{\partial x_3}{\partial \varphi} \right) + \dot{\varphi}^2 \cdot \left( \frac{\partial^2 x_1}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 x_2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 x_3}{\partial \varphi^2} \right) \right] = 0. \quad (20)$$

Якщо умова (19) чи (20) не виконується, то має місце невірноваженість сил інерції. Критерієм цієї невірноваженості може бути сумарне значення сил інерції формувальної установки:

$$F_{ic} = m \cdot \left[ \ddot{\varphi} \cdot \left( \frac{\partial x_1}{\partial \varphi} + \frac{\partial x_2}{\partial \varphi} + \frac{\partial x_3}{\partial \varphi} \right) + \dot{\varphi}^2 \cdot \left( \frac{\partial^2 x_1}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 x_2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 x_3}{\partial \varphi^2} \right) \right]. \quad (21)$$

За один цикл руху роликової формувальної установки (один оберт кривошипа) нерівномірність сил інерції може бути оцінена максимальним значенням сили інерції, зведеної до центра мас установки  $F_{ic\max}$  або його середньоквадратичним значенням, яке визначається залежністю:

$$\bar{F}_{ic} = \sqrt{\frac{1}{t_1} \int_0^{t_1} F_{ic}^2 dt} = \sqrt{\frac{m^2}{t_1} \int_0^{t_1} \left[ \ddot{\phi} \left( \frac{\partial x_1}{\partial \phi} + \frac{\partial x_2}{\partial \phi} + \frac{\partial x_3}{\partial \phi} \right) + \dot{\phi}^2 \left( \frac{\partial^2 x_1}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 x_2}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 x_3}{\partial \phi^2} \right) \right]^2 dt}, \quad (22)$$

де  $t_1 = \frac{2 \cdot \pi}{\omega_n}$  – тривалість циклу руху роликової формувальної установки;

$\omega_n$  – номінальне значення кутової швидкості приводного вала установки.

В деяких випадках доцільно оцінювати неврівноваженість сил інерції, що діють на ланки формувальної установки, за допомогою безрозмірного критерію, який може бути представлений відношенням середньоквадратичних значень зведених до центру мас установки сумарної сили інерції та сил інерції, що діють на кожний візок. Цей критерій можна представити в наступному вигляді:

$$k_{F_i} = \sqrt{\frac{1}{t_1} \int_0^{t_1} \frac{\left[ \ddot{\phi} \left( \frac{\partial x_1}{\partial \phi} + \frac{\partial x_2}{\partial \phi} + \frac{\partial x_3}{\partial \phi} \right) + \dot{\phi}^2 \left( \frac{\partial^2 x_1}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 x_2}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 x_3}{\partial \phi^2} \right) \right]^2}{\left[ \left( \ddot{\phi} \frac{\partial x_1}{\partial \phi} + \dot{\phi}^2 \frac{\partial^2 x_1}{\partial \phi^2} \right)^2 + \left( \ddot{\phi} \frac{\partial x_2}{\partial \phi} + \dot{\phi}^2 \frac{\partial^2 x_2}{\partial \phi^2} \right)^2 + \left( \ddot{\phi} \frac{\partial x_3}{\partial \phi} + \dot{\phi}^2 \frac{\partial^2 x_3}{\partial \phi^2} \right)^2 \right]} dt}. \quad (23)$$

Для забезпечення врівноваження зведеного до привідного вала крутного моменту, що виникає від дії сил інерції, необхідно виконати умову:

$$T = const \quad \text{або} \quad \frac{\partial T}{\partial \phi} = 0. \quad (24)$$

Якщо умова (24) не виконується, то має місце неврівноваженість зведеного до привідного вала крутного моменту, що виникає від дії сил інерції. Критерієм цієї неврівноваженості може бути значення крутного моменту, яке визначається залежністю:

$$\begin{aligned} M_i &= \frac{\partial T}{\partial \phi} = m \left( \dot{x}_1 \frac{\partial \dot{x}_1}{\partial \phi} + \dot{x}_2 \frac{\partial \dot{x}_2}{\partial \phi} + \dot{x}_3 \frac{\partial \dot{x}_3}{\partial \phi} \right) = \\ &= m \dot{\phi}^2 \left( \frac{\partial x_1}{\partial \phi} \frac{\partial^2 x_1}{\partial \phi^2} + \frac{\partial x_2}{\partial \phi} \frac{\partial^2 x_2}{\partial \phi^2} + \frac{\partial x_3}{\partial \phi} \frac{\partial^2 x_3}{\partial \phi^2} \right). \end{aligned} \quad (25)$$

За один цикл руху роликової формувальної установки неврівноваженість зведеного до привідного вала крутного моменту, що виникає від дії сил інерції, може бути оцінена його максимальним значенням  $M_{i\max}$  або середньоквадратичним значенням, яке визначається залежністю:

$$\begin{aligned} \overline{M}_i &= \sqrt{\frac{1}{t_1} \int_0^{t_1} m^2 \cdot \dot{\varphi}^4 \cdot \left( \frac{\partial x_1}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial^2 x_1}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial x_2}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial^2 x_2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial x_3}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial^2 x_3}{\partial \varphi^2} \right)^2 dt} = \\ &= m \cdot \sqrt{\frac{1}{t_1} \int_0^{t_1} \dot{\varphi}^4 \cdot \left( \frac{\partial x_1}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial^2 x_1}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial x_2}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial^2 x_2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial x_3}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial^2 x_3}{\partial \varphi^2} \right)^2 dt}. \end{aligned} \quad (26)$$

Оцінимо також нерівноваженість крутного моменту від дії сил інерції за допомогою безрозмірного критерію, який представимо відношенням середньоквадратичних значень моменту сил інерції всього механізму і складових моменту сил інерції від окремих елементів установки. Такий критерій має вигляд:

$$\begin{aligned} k_{M_i} &= \sqrt{\frac{1}{t_1} \int_0^{t_1} \frac{\dot{\varphi}^4 \cdot \left( \frac{\partial x_1}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial^2 x_1}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial x_2}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial^2 x_2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial x_3}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial^2 x_3}{\partial \varphi^2} \right)^2}{\dot{\varphi}^4 \left( \frac{\partial x_1}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial^2 x_1}{\partial \varphi^2} \right)^2 + \dot{\varphi}^4 \left( \frac{\partial x_2}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial^2 x_2}{\partial \varphi^2} \right)^2 + \dot{\varphi}^4 \left( \frac{\partial x_3}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial^2 x_3}{\partial \varphi^2} \right)^2} dt} = \\ &= \sqrt{\frac{1}{t_1} \int_0^{t_1} \frac{\left( \frac{\partial x_1}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial^2 x_1}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial x_2}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial^2 x_2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial x_3}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial^2 x_3}{\partial \varphi^2} \right)^2}{\left( \frac{\partial x_1}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial^2 x_1}{\partial \varphi^2} \right)^2 + \left( \frac{\partial x_2}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial^2 x_2}{\partial \varphi^2} \right)^2 + \left( \frac{\partial x_3}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial^2 x_3}{\partial \varphi^2} \right)^2} dt}. \end{aligned} \quad (27)$$

Для роликової формувальної установки з енергетично врівноваженим приводом з параметрами [16, 17]:  $r = 0,2 \text{ м}$ ;  $l = 0,8 \text{ м}$ ;  $m_1 = m_2 = m_3 = m = 1000 \text{ кг}$ ;  $J_p = 52,08 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$ ;  $\omega_o = 104,72 \text{ рад/с}$ ;  $\omega_n = 102,1 \text{ рад/с}$ ;  $\omega_{кр} = 94,95 \text{ рад/с}$ ;  $M_{кр} = 293,8 \text{ Н} \cdot \text{м}$ ;  $s_{кр} = 0,0933$ ;  $u = 9,8$ ;  $\eta = 0,9$ ;  $F_{O1} = 3562 \text{ Н}$ ;  $F_{O2} = 3562 \text{ Н}$ ;  $F_{O3} = 3562 \text{ Н}$  визначені значення сумарної сили інерції  $F_{ic}$  та крутного моменту від дії сил інерції  $M_i$  протягом одного циклу руху ( $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ ), графіки зміни яких зображено на рис. 2.

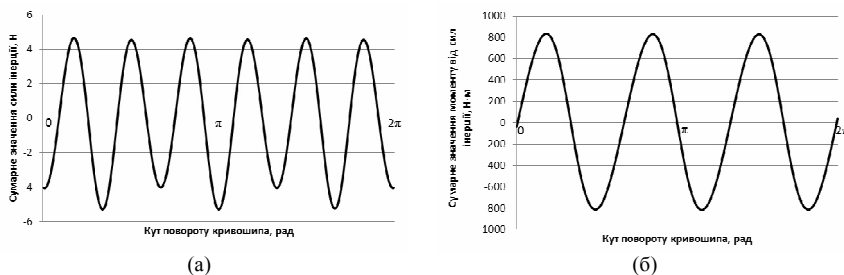


Рис. 2. Графіки зміни сумарної сили інерції (а) та сумарного моменту від сил інерції (б) в залежності від кута повороту кривошипа установки з енергетично врівноваженим приводом



На рис. 3 та 4 наведено графіки зміни сумарної сили інерції  $F_{ic}$  та крутного моменту від дії сил інерції  $M_i$  протягом одного циклу руху ( $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ ) при різних значеннях кута зміщення кривошипів  $\Delta\varphi$  ( $0^\circ$ ,  $30^\circ$ ,  $60^\circ$ ,  $90^\circ$ ). Знайдено також максимальні  $F_{ic\max}$  і  $M_{i\max}$  та середньоквадратичні  $\overline{F_{ic}}$  і  $\overline{M_i}$  значення сил інерції та моментів від сил інерції для різних значень кута  $\Delta\varphi$ . Результати обчислень занесені до табл. 1. Також в табл. 1 наведені значення безрозмірних коефіцієнтів  $k_{F_i}$  та  $k_{M_i}$ , які визначені за формулами (23) та (27). За даними табл. 1 побудовано графіки зміни максимальних  $F_{ic\max}$  і  $M_{i\max}$  та середньоквадратичних  $\overline{F_{ic}}$  і  $\overline{M_i}$  значень сил інерції та моментів від сил інерції в залежності від кута зміщення кривошипів  $\Delta\varphi$  (рис. 5 та 6). На рис. 7 представлено графіки зміни безрозмірних коефіцієнтів  $k_{F_i}$  та  $k_{M_i}$  в залежності від кута зміщення кривошипів  $\Delta\varphi$ . При визначенні описаних вище характеристик установки використовувались значення кутової швидкості обертання привідного вала  $\dot{\varphi}$  та його кутового прискорення  $\ddot{\varphi}$  для кожного значення кута зміщення кривошипів  $\Delta\varphi$ , що були визначені за методикою, описаною в роботі [17].

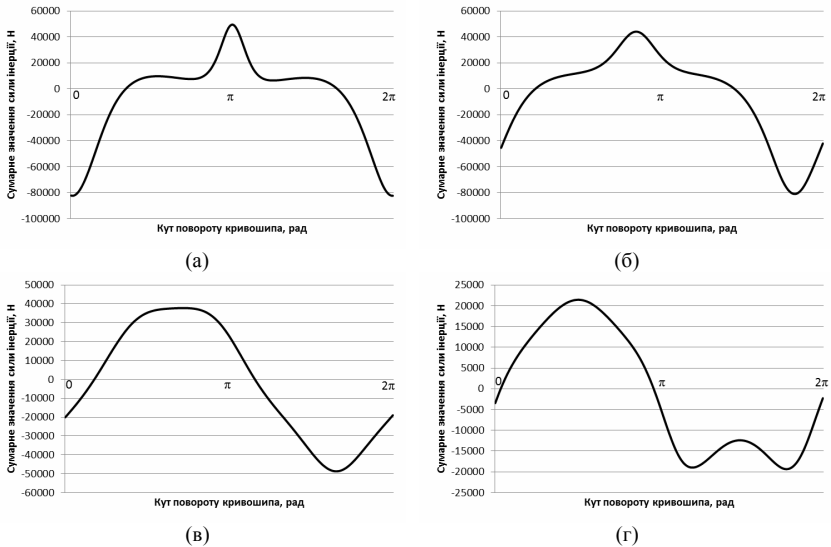


Рис. 3. Графіки зміни сумарної сили інерції установки з енергетично врівноваженим приводом в залежності від кута повороту кривошипа при різних значеннях кута зміщення кривошипів  $\Delta\varphi$ : а –  $0^\circ$ ; б –  $30^\circ$ ; в –  $60^\circ$ ; г –  $90^\circ$

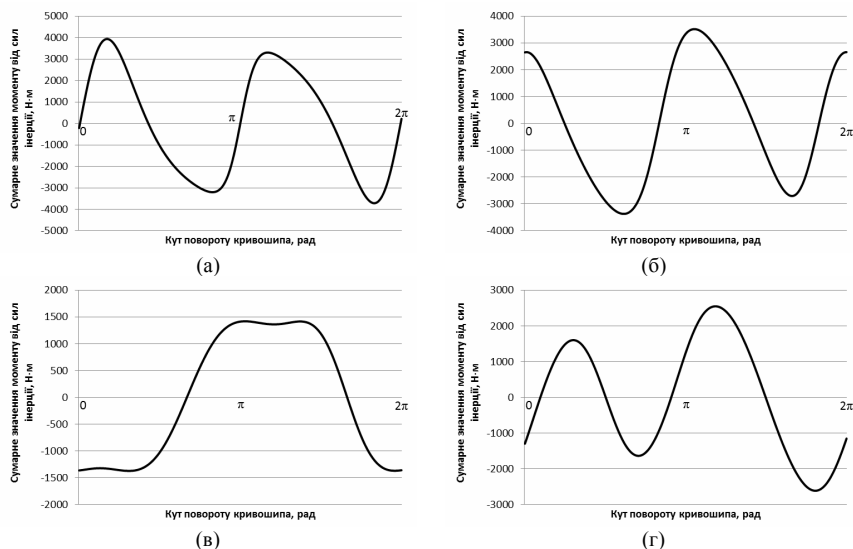


Рис. 4. Графіки зміни сумарного моменту від сил інерції установки з енергетично врівноваженим приводом в залежності від кута повороту кривошипа при різних значеннях кута зміщення кривошипів  $\Delta\varphi$ : а –  $0^\circ$ ; б –  $30^\circ$ ; в –  $60^\circ$ ; г –  $90^\circ$

Таблиця 1

## Результати розрахунків

$\Delta\varphi$	$F_{ic\max}, H$	$M_{i\max}, H \cdot m$	$\bar{F}_{ic}, H$	$\bar{M}_i, H \cdot m$	$k_{F_i}$	$k_{M_i}$
0	82389,2	3935,015	32033,83	2467,494	1,732051	1,732051
10	83943,1	3866,94	32834,84	2491,278	1,581451	1,523829
20	80583,8	3363,17	32236,42	2326,281	1,4477	1,349568
30	81009,8	3516,26	34017,26	2221,869	1,342342	1,148223
40	79773,6	3495,44	36422,48	2003,116	1,26636	0,864206
50	67339,9	2700,54	34997,21	1509,999	1,211132	0,576289
60	48717,8	1419,54	30210,55	1161,438	1,153651	0,418416
70	32994,2	2271,04	25125,78	1298,465	1,0683	0,4763
80	26575,92	2670,3	19889,75	1526,934	0,938129	0,613942
90	21436,44	2608,19	14873,12	1576,342	0,753549	0,7062
100	16205,69	2181,245	10106,16	1398,303	0,51364	0,6004
110	9513,42	1558,15	5203,27	978,55	0,24326	0,407141
120	5,3042	832,7	3,2915	580,28	0,000131	0,22867

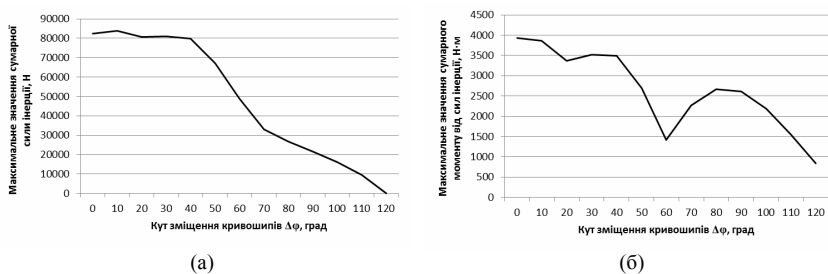


Рис. 5. Графіки зміни максимальних значень сил інерції  $F_{ic\max}$  (а) та моментів від сил інерції  $M_{i\max}$  (б) в залежності від кута зміщення кривошипів  $\Delta\varphi$

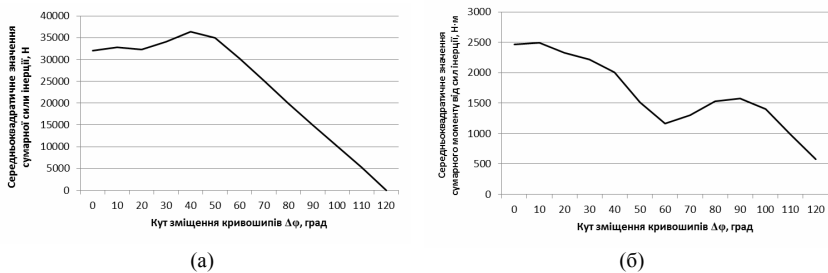


Рис. 6. Графіки зміни середньоквадратичних значень сил інерції  $\overline{F}_{ic}$  (а) та моментів від сил інерції  $\overline{M}_i$  (б) в залежності від кута зміщення кривошипів  $\Delta\varphi$

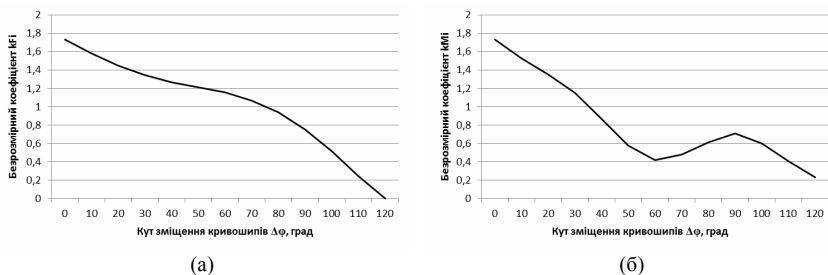


Рис. 7. Графіки зміни безрозмірних коефіцієнтів  $k_{F_i}$  (а) та  $k_{M_i}$  (б) в залежності від кута зміщення кривошипів  $\Delta\varphi$

Аналізуючи дані табл. 1 та графіки на рис. 5-7, можна зробити висновок, що максимальне значення сумарної сили інерції  $F_{ic\max}$  та її середньоквадратичне значення  $\overline{F}_{ic}$  спочатку збільшуються та періодично зменшуються при значеннях кута зміщення кривошипів від  $\Delta\varphi=0^\circ$  до  $\Delta\varphi=50^\circ$ , а потім зменшуються і набувають мінімального значення при

$\Delta\varphi=120^\circ$ ; безрозмірний коефіцієнт  $k_{F_i}$  постійно зменшується при збільшенні кута зміщенні кривошипів і приймає мінімальне значення при зміщенні кривошипів  $\Delta\varphi=120^\circ$ ; максимальне значення моменту від сил інерції спочатку зменшується при значеннях кута зміщення кривошипів від  $\Delta\varphi=0^\circ$  до  $\Delta\varphi=20^\circ$ , потім збільшується до значення  $\Delta\varphi=40^\circ$ , після чого іде різке зменшення до значення кута зміщення кривошипів  $\Delta\varphi=60^\circ$ , потім збільшується до значення  $\Delta\varphi=80^\circ$  і приймає мінімальне значення при зміщенні кривошипів  $\Delta\varphi=120^\circ$ ; середньоквадратичне значення моменту від сил інерції та безрозмірний коефіцієнт  $k_{M_i}$  зменшуються при значеннях кута зміщення кривошипів від  $\Delta\varphi=0^\circ$  до  $\Delta\varphi=60^\circ$ , після цього йде їх зростання до значення  $\Delta\varphi=90^\circ$ , а потім зменшуються і набувають мінімального значення при  $\Delta\varphi=120^\circ$ .

**Висновки.** В результаті проведених досліджень розглянуто динамічне зрівноваження привідного механізму роlikової формувальної установки з енергетично зрівноваженим приводом. При моделюванні процесу зрівноваження привідного механізму машин роlikового формування розв'язано дві задачі динамічного зрівноваження: зрівноваження сил інерції, що прикладені в центрах мас рухомих ланок, та зрівноваження приведенного до осі обертання привідного вала крутного моменту, що виникає від дії сил інерції. Встановлено, що в установці з енергетично зрівноваженим приводом найкраще зрівноваження сил інерції, що прикладені в центрах рухомих мас ланок, та приведенного до осі обертання привідного вала крутного моменту, що виникає від дії сил інерції, спостерігається при значенні кута зміщення кривошипів  $\Delta\varphi=120^\circ$ . Отримані у даній роботі результати можуть бути у подальшому використані для уточнення та вдосконалення існуючих інженерних методів розрахунку привідних механізмів машин роlikового формування як на стадіях проектування/конструювання, так і у режимах реальної експлуатації.

#### СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Гарнець В.М.* Прогресивні бетоноформуючі агрегати і комплекси / В.М. Гарнець – К.: Будівельник, 1991. – 144 с.
2. *Гарнець В.М.* Бетоноформувальні агрегати. Конструктивно-функціональні схеми, принцип дії, основи теорії: Монографія / В.М. Гарнець, С.В. Зайченко, Ю.В. Човнюк, В.О. Шаленко, Я.С. Приходько – К.: Інтерсервіс, 2015. – 238 с.
3. *Кузин В.Н.* Технология роlikового формования плоских изделий из мелкозернистых бетонов: автореф. дис. ... канд. техн. наук / В.Н. Кузин – М.: Моск. инж.-строит. ин-т. – 1981. – 20 с.

4. *Рюшин В.Т.* Исследование рабочего процесса и разработка методики расчета машин роликового формования бетонных смесей: дис. ... канд. техн. наук / В.Т. Рюшин – К.: Киев. инж.-строит. ин-т. – 1986.
5. *Ловейкін В.С.* Динамічний аналіз роликової формувальної установки з рекуперативним приводом / В.С. Ловейкін, К.І. Почка // Динаміка, міцність і надійність сільськогосподарських машин: Пр. І-ї Міжнародної науково-технічної конференції (DSR AM-1). – Тернопіль, 2004. – С. 507-514.
6. *Назаренко І.І.* Основи теорії руху землерийних і ущільнювальних машин будіндустрії з керованими у часі оптимальними параметрами : Монографія / І.І. Назаренко, В.М. Смірнов, Л.Є. Пелевін, А.В. Фомін, А.Т. Свідерський, О.О. Костенюк, М.М. Ручинський, О.П. Дедов, О.М. Гаркавенко, І.Ю. Мартинюк – К.: МП Леся, 2013. – 188 с.
7. *Zaichenko S.* Development of a geomechanic complex for geotechnical monitoring contour mine groove / S. Zaichenko, V. Shalenko, N. Shevchuk, V. Varnichna // Eastern-European J. Enterprise Technologies. – 2017. – Vol. 3/9 (87). – P. 19-25. DOI: 10.155/1729-4061.2017.102067.
8. *Гарнець В.М.* Теорія і практика створення бетоноформувальних агрегатів (БФА) / В.М. Гарнець, Ю.В. Човнюк, С.В. Зайченко, В.О. Шаленко, Я.С. Приходько // Гірничі, будівельні, дорожні та меліоративні машини. – К.: КНУБА, 2014. – Вип. 83. – С. 49-54.
9. *Гарнець В.М.* Розробка науково-практичних рекомендацій по створенню бетоноформуєчих агрегатів (БФА) / В.М. Гарнець, С.В. Зайченко, Я.С. Приходько, В.О. Шаленко // Гірничі, будівельні, дорожні та меліоративні машини. – К.: КНУБА, 2012. – Вип. 79. – С. 46-52.
10. *Зайченко С.В.* Енергетичний аналіз процесу роликового ущільнення / С.В. Зайченко, С.П. Шевчук, В.М. Гарнець // Енергетика: Економіка, технологія, екологія. – 2012. – № 1 (30). – С. 77-83.
11. *Зайченко С.В.* Тривимірне моделювання процесу роликового ущільнення стовбурного кріплення / С.В. Зайченко, С.П. Шевчук, В.М. Гарнець // Гірничі, будівельні, дорожні та меліоративні машини. – К.: КНУБА, 2012. – Вип. 79. – С. 40-45.
12. *Приходько Я.С.* Взаємозгодженість роботи механізмів при ролико-екструзійному формуванні багатопустотних виробів / Я.С. Приходько, В.М. Гарнець // Галузеве машинобудування, будівництво. – 2012. – № 1 (31). – С. 305-310.
13. *Ловейкін В.С.* Синтез кулачкового приводного механізму роликової формувальної установки з комбінованим режимом руху по ускоренню третього порядку / В.С. Ловейкін, К.І. Почка // Міжнародний науково-технічний журнал «Наука і техніка». – Минск: БНТУ, 2017. – Т. 16, № 3. – С. 206–214. DOI: [10.21122/2227-1031-2017-16-3-206-214](https://doi.org/10.21122/2227-1031-2017-16-3-206-214).
14. *Ловейкін В.С.* Динамічний аналіз роликової формувальної установки з кривошипно-шатунним приводним механізмом / В.С. Ловейкін, К.І. Почка, Ю.О. Ромасевич, О.Б. Почка // Опір матеріалів і теорія споруд. – К.: КНУБА, 2019. – Вип. 102. – С. 91-108. DOI: 10.32347/2410-2547.2019.102.91-108.
15. Патент України на корисну модель № 50032 У. Установка для формирования виробів з бетонних сумішей / Ловейкін В.С., Почка К.І. – № у 200911443 заявл. 10.11.2009; опубл. 25.05.2010, Бюл. № 10.
16. *Ловейкін В.С.* Обґрунтування параметрів енергетично врівноваженого приводу роликової формувальної установки / В.С. Ловейкін, К.І. Почка // Техніка будівництва. – 2014. – № 32. – С. 25-32.
17. *Ловейкін В.С.* Аналіз нерівномірності руху роликової формувальної установки з енергетично врівноваженим приводом / В.С. Ловейкін, К.І. Почка // Вібрації в техніці та технологіях. – 2010. – № 4 (60). – С. 20-29.

## REFERENCES

1. *Garnec V.M.* Progressivni betonoformujuchi agregati i kompleksi (Progressive concrete the forming units and complexes) / V.M. Garnec – К.: Budivelnik, 1991. – 144 s.
2. *Garnec V.M.* Betonoformoval'ni agregati. Konstruktivno-funkci-onal'ni shemi, princip diy, osnovi teorii: Monohrafiya (Concrete the forming units. Constructive and functional to the scheme, principle of action, theory basis: Monograph) / V.M. Garnec, S.V. Zajchenko, Ju.V. Chovnjuk, V.O. Shalenko, Ja.S. Prihodko – К.: Interservis, 2015. – 238 s.

3. *Kuzin V.N.* Tehnologija rolkovogo formovanija ploskih izdelij iz melkozernistyh betonov (Technology of roller formation of flat articles from fine-grained concrete). Avtoref. dis... kand. nauk (Abstract of the thesis of the candidate of science) / V.N. Kuzin – M.: Moscow construction institute. – 1981. – 20 s.
4. *Rjushin V.T.* Issledovanie raboche-go processa i razrabotka metodiki rascheta mashin rolkovogo formovanija betonnyh smesej (Research of working process and development of a method of calculation of cars of roller formation of concrete mixes). Dis.... kandidata tehn. nauk. (Thesis of Candidate of Technical Sciences) / V.T. Rjushin – K.: Kyiv construction institute. – 1986.
5. *Loveikin V.S.* Dinamichnij analiz rolkovoi formovochnoi ustanovki z rekuperacijnim privodom (The dynamic analysis of roller forming installation with the rekuperativ drive) / V.S. Loveikin, K.I. Pochka // Dinamika, micnist' i nadijnist' sil'skogospodars'kih mashin: Pr. 1-i Mizhnarodnoi naukovno-tehnichnoi konferencii (DSR AM-I) (Dynamics, durability and reliability of farm vehicles. Works of the first International scientific and technical conference (DSR AM-I)). – Ternopil', 2004. – S. 507-514.
6. *Nazarenko I.I.* Osnovi teorii ruhu zemlerijnih i ushil'njuval'nih mashin budindustrii z kerovanimi u chasi optimal'nimi parametrami: Monohrafiia (Bases of the theory of the movement of the digging and condensing cars of the construction industry with the optimum parameters operated in time: Monograph) / I.I. Nazarenko, V.M. Smirnov, L.Je. Pelevin, A.V. Fomin, A.T. Sviders'kij, O.O. Kostenjuk, M.M. Ruchins'kij, O.P. Djedov, O.M. Garkavenko, I.Ju. Martinjuk – Kyiv: MP Lesja, 213. – 188 s.
7. *Zaichenko S.* Development of a geomechanic complex for geotechnical monitoring contour mine groove / S. Zaichenko, V. Shalenko, N. Shevchuk, V. Vapnichna // Eastern-European J. Enterprise Technologies. – 2017. – Vol. 3/9 (87). – P. 19-25. DOI: 10.155/1729-4061.2017.102067.
8. *Garneć V.M.* Teorija i praktika stvorenja betonofornoval'nih agregativ (BFA) (Theory and practice of creation of units of formation of concrete) / V.M. Garneć, Ju.V. Chovnjuk, S.V. Zajchenko, V.O. Shalenko, Ja.S. Prihod'ko // Girnichi, budivel'ni, dorozhni ta meliorativni mashini. – K.: KNUBA, 2014. – Vyp. 83. – S. 49-54.
9. *Garneć V.M.* Rozrobka naukovno-praktichnih rekomendacij po stvorenju betonofornovujuchih agregativ (BFA) (Development of scientific and practical recommendations about creation of units of formation of concrete) / V.M. Garneć, S.V. Zajchenko, Ja.S. Prihod'ko, V.O. Shalenko // Girnichi, budivel'ni, dorozhni ta meliorativni mashini. – K.: KNUBA, 2012. – Vyp. 79. – S. 46-52.
10. *Zajchenko S.V.* Energetichnij analiz procesu rolkovogo ushil'nenja (Power analysis of process of roller consolidation) / S.V. Zajchenko, S.P. Shevchuk, V.M. Garneć // Energetika: Ekonomika, tehnologija, ekologija. – 2012. – No. 1 (30). – S. 77-83.
11. *Zajchenko S.V.* Trivimirne modeljuvannja procesu rolkovogo ushil'nenja stovburnogo kriplennja (Three-dimensional modeling of process of roller consolidation of column fastening) / S.V. Zajchenko, S.P. Shevchuk, V.M. Garneć // Girnichi, budivel'ni, dorozhni ta meliorativni mashini. – K.: KNUBA, 2012. – Vyp. 79. – S. 40-45.
12. *Prihod'ko Ja.S.* Vzaczougodzhenist' roboti mehanizmiv pri rolko-ekstruzijnomu formuvanni bagatopustotnih virobiv (Interconsistency of operation of mechanisms at roller and extrusive formation of multihollow products) / Ja.S. Prihod'ko, V.M. Garneć // Galuzeve mashinobuduvannja, budivnictvo. – 2012. – № 1 (31). – S. 305-310.
13. *Loveikin V.S.* Sintez kulachkovogo privodnogo mehanizma rolkovoj formovochnoj ustanovki s kombinirovannym rezhimom dvizhenija po uskoreniju tret'ego porjadka (Synthesis of camshaft driving mechanism in roller molding installation with combined motion mode according to acceleration of third order) / V.S. Loveikin, K.I. Pochka // Mezhdunarodnyj nauchno-tehnicheskij zhurnal «Nauka i tehnika» (International scientific and technical magazine

- «Science & Technique»). – Minsk: Belarusian National Technical University. – Т. 16, No 3. – S. 206-214. DOI:10.21122/2227-1031-2017-16-3-206-214.
14. Loveikin V.S. Dinamichnij analiz rolukovoj formuval'noj ustanovki z krivoshipno-shatunnim prividnim mehanizmom (Dynamic analysis of roller forming installation about a crank connecting rod the driving mechanism) / V.S. Loveikin, K.I. Pochka, Yu.O. Romasevich, O.B. Pochka // Opir materialiv i teoriia sporud: nauk.-tekh. zbirnyk. – K.: KNUBA, Vyp. 102, 2019. S. 91-108. DOI: 10.32347/2410-2547.2019.102.91-108.
  15. Pat. 50032 UA, IPC B28B 13/00, Installation for formation of products from concrete mixes, Loveikin V.S., Pochka K.I., Publ. 25.05.2010.
  16. Loveikin V.S. Obruntuвання параметрів енергетично врівноваженого приводу роликів формувальної установки (Justification by the parameter of energetically balanced drive of roller forming installation) / V.S. Loveikin, K.I. Pochka // Tehnika budivnictva (Technology of construction). – 2014. – № 32. – S. 25-32.
  17. Loveikin V.S. Analiz nerivnomirnosti ruhu rolukovoї formuval'noi ustanovki z energetично врівноваженим приводом (The analysis of unevenness of the movement of roller forming installation with energetically balanced drive) / V.S. Loveikin, K.I. Pochka // Vibracii v tehnici ta tehnologijah (Vibrations in the equipment and technologies). – 2010. – № 4 (60). – S. 20-29.

*Стаття надійшла до редакції 24.09.2019 р.*

*Ловеїкін В.С., Почка К.І., Пристайло М.О., Почка О.Б.*

#### **ДИНАМІЧНЕ ЗРІВНОВАЖЕННЯ ПРИВІДНОГО МЕХАНІЗМУ РОЛИКОВОЇ ФОРМУВАЛЬНОЇ УСТАНОВКИ З ЕНЕРГЕТИЧНО ВРІВНОВАЖЕНИМ ПРИВОДОМ**

З метою підвищення надійності та довговічності розглянуто динамічне зрівноваження привідного механізму роликів формувальної установки з енергетично врівноваженим приводом. При моделюванні процесу зрівноваження привідного механізму розв'язано дві задачі динамічного врівноваження: врівноваження сил інерції, що прикладені в центрах мас рухомих ланок, та врівноваження приведеного до осі обертання привідного вала крутного моменту, що виникає від дії сил інерції. При цьому визначено всі кінематичні характеристики формувальних візків установки, записано функції зміни кінетичної енергії кожного елемента установки та всієї системи, сил інерції кожного елемента установки та сумарної сили інерції, сумарного моменту від дії сил інерції. На основі рівнянь Лагранжа другого роду складено рівняння руху установки і визначено узагальнену силу та рушійний момент на валу привідного двигуна. Неврівноваженість привідного механізму оцінюється максимальними і середньоквадратичними значеннями сумарної сили інерції та крутного сумарного моменту від дії сил інерції, безрозмірними коефіцієнтами, що виражають відношення середньоквадратичних значень зведених до центру мас установки сумарної сили інерції та сил інерції, що діють на кожний візок, і відношення середньоквадратичних значень моменту від дії сил інерції всього механізму і складових моменту від дії сил інерції окремих елементів. Встановлено, що в установці з енергетично врівноваженим приводом найкраще врівноваження сил інерції, що прикладені в центрах рухомих мас ланок, та приведеного до осі обертання привідного вала крутного моменту, що виникає від дії сил інерції, спостерігається при значенні кута зміщення кривошипів  $120^\circ$ . Отримані результати можуть бути у подальшому використані для уточнення та вдосконалення існуючих інженерних методів розрахунку привідних механізмів машин роликів формувальної установки як на стадіях проектування/конструювання, так і у режимах реальної експлуатації.

**Ключові слова:** роликів формувальна установка, привідний механізм, сила інерції, момент, зрівноваження.

*Loveikin V.S., Pochka K.I., Prystajlo M.O., Pochka O.B.*

### **DYNAMIC BALANCING OF DRIVE MECHANISM OF ROLLER FORMING INSTALLATION WITH ENERGY BALANCED DRIVE**

In order to increase reliability and durability dynamic balancing of drive mechanism of roller forming installation with energy balanced drive is considered. When simulating the process of balancing the drive mechanism, two tasks of dynamic balancing are solved: balancing of inertia forces applied in cents of masses of movable links, and balancing of torque moment brought to the axis of rotation of the drive shaft resulting from the action of inertia forces. At the same time all kinematic characteristics of forming trolleys of the installation are defined, functions of kinetic energy of each element and the whole system, forces of inertia of each element of the installation and total force of inertia, total moment from action of inertia forces are recorded. On the basis of Lagrange equations of the second kind, the equation of the motion of the installation is compiled and the generalized force and driving moment on the shaft of the drive motor are determined. Unbalance of drive mechanism is estimated by maximum and standard values of total inertia force and torque total moment from action of inertia forces, dimensionless coefficients expressing a ratio of the standard values of the total inertia force and inertia forces reduced to the center of mass of the apparatus; acting on each trolley, and ratio of standard values of moment from action of inertia forces of the whole mechanism and components of moment from action of inertia forces of individual elements. It has been found that in an energetically balanced drive unit, the best balancing of the inertia forces applied in the centers of mass of the links and the torque brought to the rotation axis of the drive shaft resulting from the action of the inertia forces is observed at the value of the displacement angle of the cranks  $120^{\circ}$ . The received results can be used further for the specification and improvement existing engineering by method of calculation of driving mechanisms of cars of roller formation both at design/designing stages and in the modes of real operation.

**Keywords:** roller forming installation, driving mechanism, inertia force, moment, balancing.

*Ловеikin В.С., Почка К.И., Пристайло Н.А., Почка О.Б.*

### **ДИНАМИЧЕСКОЕ УРАВНОВЕШИВАНИЕ ПРИВОДНОГО МЕХАНИЗМА РОЛИКОВОЙ ФОРМОВОЧНОЙ УСТАНОВКИ С ЭНЕРГЕТИЧЕСКИ УРАВНОВЕШЕННЫМ ПРИВОДОМ**

С целью повышения надёжности и долговечности рассмотрено динамическое уравновешивание приводного механизма роликовой формовочной установки с энергетически уравновешенным приводом. При моделировании процесса уравновешивания приводного механизма решено две задачи динамического уравновешивания: уравновешивание сил инерции, приложенных в центрах масс подвижных звеньев, и уравновешивание приведенного к оси вращения приводного вала крутящего момента, возникающего от действия сил инерции. При этом определены все кинематические характеристики формовочных тележек установки, записаны функции кинетической энергии каждого элемента и всей системы, сил инерции каждого элемента установки и суммарной силы инерции, суммарного момента от действия сил инерции. На основании уравнений Лагранжа второго рода составлено уравнение движения установки и определены обобщённая сила и движущий момент на валу приводного двигателя. Неуравновешенность приводного механизма оценивается максимальными и среднеквадратическими значениями суммарной силы инерции и крутящего суммарного момента от действия сил инерции, безразмерными коэффициентами, выражающими отношение среднеквадратических значений приведенных к центру масс установки суммарной силы инерции и сил инерции, действующих на каждую тележку, и отношение среднеквадратических значений момента от действия сил инерции всего механизма и составляющих момента от действия сил инерции отдельных элементов. Установлено, что в установке с энергетически уравновешенным приводом наилучшее уравновешивание сил инерции, приложенных в центрах масс звеньев, и приведенного к оси вращения приводного вала крутящего момента, возникающего от действия сил инерции, наблюдается при значении угла смещения кривошипов  $120^{\circ}$ . Полученные результаты могут быть в дальнейшем использованы для уточнения и усовершенствования существующих инженерных методом расчёта приводных механизмов машин роликового формования как на стадиях проектирования/конструирования, так и в режимах реальной эксплуатации.

**Ключевые слова:** роликовая формовочная установка, приводной механизм, сила инерции, момент, уравновешивание.



УДК 693.546

*Ловейкін В.С., Почка К.І., Пристайло М.О., Почка О.Б. Динамічне зрівноваження приводного механізму роликів формувальної установки з енергетично зрівноваженим приводом // Опір матеріалів і теорія споруд: наук.-тех. збірн. – 2019. – Вип. 103. – С. 112-130.*

*Для роликів формувальної установки з енергетично зрівноваженим приводом розглянуто динамічне зрівноваження приводного механізму. Неврівноваженість приводного механізму оцінюється максимальними і середньоквадратичними значеннями сумарної сили інерції та крутного сумарного моменту від дії сил інерції, безрозмірними коефіцієнтами, що виражають відношення середньоквадратичних значень зведених до центру мас установки сумарної сили інерції та сил інерції, що діють на кожний взок, і відношення середньоквадратичних значень моменту від дії сил інерції всього механізму і складових моменту від дії сил інерції окремих елементів.*

Табл. 1. Іл. 7. Бібліогр. 17 назв.

UDC 693.546

*Loveikin V.S., Pochka K.I., Prystajlo M.O., Pochka O.B. Dynamic balancing of drive mechanism of roller forming installation with energy balanced drive // Strength of materials and theory of structure. – 2019. – Issue 103. – P. 112-130.*

*For a roller forming installation with an energetically balanced drive, dynamic balancing of the drive mechanism is considered. Unbalance of drive mechanism is estimated by maximum and standard values of total inertia force and torque total moment from action of inertia forces, Dimensionless coefficients expressing a ratio of the standard values of the total inertia force and inertia forces reduced to the center of mass of the apparatus; Acting on each trolley, and ratio of standard values of moment from action of inertia forces of the whole mechanism and components of moment from action of inertia forces of individual elements.*

Tabl. 1. Fig. 7. Ref. 17.

УДК 693.546

*Ловейкін В.С., Почка К.И., Пристайло Н.А., Почка О.Б. Динамическое уравновешивание приводного механизма роликів формувальної установки с энергетически уравновешенным приводом // Сопrotивление материалов и теория сооружений: науч.-техн. сборник. – 2019. – Вып. 103. – С. 112-130.*

*Для роликів формувальної установки с энергетически уравновешенным приводом рассмотрено динамическое уравновешивание приводного механизма. Неуравновешенность приводного механизма оценивается максимальными и среднеквадратическими значениями суммарной силы инерции и крутящего суммарного момента от действия сил инерции, безразмерными коэффициентами, выражающими отношение среднеквадратических значений приведенных к центру масс установки суммарной силы инерции и сил инерции, действующих на каждую тележку, и отношение среднеквадратических значений момента от действия сил инерции всего механизма и составляющих момента от действия сил инерции отдельных элементов.*

Табл. 1. Ил. 7. Библиогр. 17 назв.

**Автор (вчена ступень, вчене звання, посада):** доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри конструювання машин і обладнання Національного університету біоресурсів і природокористування України ЛОВЕЙКІН Вячеслав Сергійович

**Адреса:** 03041, Україна, м. Київ, вул. Героїв Оборони, 12, навчальний корпус № 11, Національний університет біоресурсів і природокористування України, кафедра конструювання машин і обладнання, ЛОВЕЙКІНУ Вячеславу Сергійовичу

**Тел.:** +38(044) 527-87-34;

**Мобільний тел.:** +38(097) 349-14-53;

**Імейл:** [lovvs@ukr.net](mailto:lovvs@ukr.net)

**ORCID ID:** <https://orcid.org/0000-0003-4259-3900>

**Автор (вчена ступень, вчене звання, посада):** кандидат технічних наук, доцент, завідувач кафедри основ професійного навчання КНУБА ПОЧКА Костянтин Іванович

**Адреса:** 03037, Україна, м. Київ, Повітрофлотський проспект 31, Київський національний університет будівництва і архітектури, кафедра основ професійного навчання, ПОЧЦІ Костянтину Івановичу

**Тел.:** +38(044) 248-69-25;

**Мобільний тел.:** +38(097) 212-86-29;

**Імейл:** [shanovniv@ukr.net](mailto:shanovniv@ukr.net)

**ORCID ID:** <http://orcid.org/0000-0002-0355-002X>

**Автор (вчена ступень, вчене звання, посада):** кандидат технічних наук, доцент, доцент кафедри будівельних машин КНУБА ПРИСТАЙЛО Микола Олексійович

**Адреса:** 03037, Україна, м. Київ, Повітрофлотський проспект 31, Київський національний університет будівництва і архітектури, кафедра будівельних машин, ПРИСТАЙЛО Миколі Олексійовичу

**Мобільний тел.:** +38(097) 495-07-50;

**Імейл:** [pristaylo\\_na@ukr.net](mailto:pristaylo_na@ukr.net)

**ORCID ID:** <https://orcid.org/0000-0003-3151-4680>

**Автор (вчена ступень, вчене звання, посада):** асистент кафедри теплогазопостачання і вентиляції КНУБА ПОЧКА Ольга Богданівна

**Адреса:** 03037, Україна, м. Київ, Повітрофлотський проспект 31, Київський національний університет будівництва і архітектури, кафедра теплогазопостачання і вентиляції, ПОЧЦІ Ользі Богданівні

**Мобільний тел.:** +38(097) 196-92-04;

**Імейл:** [zasedkoolga@ukr.net](mailto:zasedkoolga@ukr.net)

**ORCID ID:** <https://orcid.org/0000-0001-5701-978X>

УДК 539.3

## ВЕЙВЛЕТ-АНАЛІЗ СЕЙСМІЧНОЇ ХВИЛЬОВОЇ РЕАКЦІЇ КАРКАСНОЇ БУДІВЛІ

**О.О. Лук'янченко,**

канд. техн. наук

**Ю.В. Ворона,**

канд. техн. наук

**О.В. Костіна,**

канд. техн. наук

*Київський національний університет будівництва і архітектури  
Повітрофлотський просп., 31, м. Київ. 03680; Імейл: [lukianch0907@meta.ua](mailto:lukianch0907@meta.ua)*

DOI: 10.32347/2410-2547.2019.103.131-144

Застосування нових і ефективних методів, до яких відносяться вейвлет-методи, для якісного аналізу сейсмічних реакцій будівельних споруд є вимогою часу. В статті досліджена ефективність нового чисельного підходу до розрахунку сейсмічної реакції багатоповерхової каркасної будівлі, заснованого на теорії і методах нелінійної механіки, рухомої хвилі та вейвлет-аналізу. Дія сейсмічного впливу подана у вигляді випадкових реалізацій прискорення ґрунту різної магнітуди, які отримано за допомогою статистичного підходу Руїза та Пензієна, та хвильової реакції будівлі на горизонтальне сейсмічне переміщення ґрунту. За допомогою програмного комплексу скінченно-елементного аналізу побудована математична модель нестационарних стохастичних коливань будівлі у вигляді систем диференціальних рівнянь другого порядку в узагальнених координатах. Хвильова реакція будівлі представлена у вигляді поперечних згинальних хвиль в колонах, амплітуда яких відповідала магнітуді сейсмічного впливу. Досліджена статична поведінка та стійкість каркасної будівлі при дії поверхневого тиску на плити перекриття в нелінійній постановці методом Ньютона-Рафсона. Модальний аналіз виконано за допомогою методу Ланцоша. Динамічна поведінка будівлі досліджена методом Рунге-Кутти четвертого порядку. Виконано вейвлет-аналіз реалізацій сейсмічного впливу та сейсмічних відгуків каркасної будівлі із застосуванням дискретних ортогональних (Добеші 4) і неперервних неортогональних (Морле) одновимірних комплексних вейвлет-функцій. Візуалізація сейсмічного впливу та сейсмічної реакції будівлі подана у вигляді вейвлет-спектрограм та Фур'є-образів. Підтверджена доцільність урахування поперечних згинальних рухомих хвиль в колонах багатоповерхової каркасної будівлі при дослідженні її сейсмічної поведінки. Особливо це стосується каркасних будівель з багатьма прольотами, бо швидкість хвиль в колонах буде різною і залежатиме від збільшення кількості плит перекриття, що спираються на них.

**Ключові слова:** вейвлет-аналіз, каркасна будівля, метод скінченних елементів, нелінійна механіка, сейсмічний вплив, теорія рухомих хвиль.

### Вступ

Поява вейвлет-аналізу є однією з важливих подій, які відбулися в математиці в кінці двадцятого сторіччя. На даний момент вейвлет-аналіз широко застосовується в дослідженнях нестационарних сигналів, неоднорідних полів, зображень різної природи, часових рядів, для розпізнавання образів і вирішення багатьох завдань в радіотехніці, зв'язку, електроніці, ядерній фізиці, сейсмоакустиці, метеорології, біології, економіці та інших областях науки і техніки [1,7]. Вейвлет-методи успішно доповнюють, а іноді здатні і повністю замінити обробку даних

традиційними методами. Вейвлет-аналіз є ефективним інструментарієм для дослідження різних закономірностей, що містяться в сейсмічних сигналах. Тому важливо застосовувати нові і ефективні вейвлет-методи до якісного аналізу сейсмічних реакцій будівельних споруд.

Стаття присвячена аналізу ефективності застосування чисельного підходу, заснованого на теорії нелінійної механіки, рухомої хвилі, вейвлет-аналізу та процедур сучасних обчислювальних комплексів [9] до розрахунку сейсмічної реакції багатопверхових каркасних будівель. На думку багатьох дослідників [2-6] в основу розрахунків споруд на сейсмостійкість для найбільш сейсмічно небезпечних слабких ґрунтів, як міру інтенсивності землетрусу, разом з нормуванням амплітуд прискорень ґрунту слід ввести нормування амплітуд його пружного переміщення і швидкості. В дослідженнях сейсмічної реакції висотної споруди та просторової одноповерхової конструкції [7,8] дія сейсмічного впливу авторами подана у вигляді випадкових реалізацій прискорень ґрунту, які отримано за допомогою статистичного підходу Руїза та Пензієна [3], та хвильової реакції споруд на горизонтальне сейсмічне переміщення ґрунту згідно рекомендацій Курзанова А.М. [5]. Математична модель нестационарних стохастичних коливань будівлі подана у вигляді системи нез'язаних диференціальних рівнянь другого порядку в узагальнених координатах з багатьма ступенями вільності. Сейсмічна реакція каркасної будівлі отримана у вигляді випадкових реалізацій переміщень, швидкостей і прискорень за допомогою методу прямого чисельного інтегрування Рунге-Кутти четвертого порядку. Виконано вейвлет-перетворення отриманих реалізацій на основі дискретних ортогональних (Добеші 4) і неперервних неортогональних (Морле) одновимірних комплексних вейвлет-функцій. За допомогою вейвлет-спектрограм та Фур'є-образів реалізацій сейсмічного впливу і сейсмічних реакцій будівлі проаналізована локалізація їх максимальних значень в частотно-часовому просторі. Дана оцінка ефективності урахування горизонтального сейсмічного переміщення ґрунту у вигляді поперечної згинальної хвильової реакції будівлі при дослідженні її сейсмічної реакції.

### **1. Комп'ютерне моделювання сейсмічної поведінки каркасної будівлі з урахуванням рухомих хвиль**

Розглянута п'ятиповерхова каркасна будівля, розрахункова модель якої побудована за допомогою обчислювального комплексу скінченно-елементного аналізу NASTRAN [9]. Елементи будівлі виготовлені з бетону класу В25 з механічними характеристиками:  $E = 30 \times 10^9$  Па,  $G = 12,75 \times 10^9$  Па,  $\mu = 0,167$  та  $\gamma = 2,4 \times 10^3$  кг/м<sup>3</sup>. Пружні колони мають квадратний поперечний переріз 0,4х0,4 м і висоту 3 м на кожному поверсі будівлі. Нижні кінці колон першого поверху жорстко закріплені у ґрунт. На колони спираються квадратні плити розміром 6х6 м і товщиною 0,2 м. Враховано жорстке з'єднання колон і плит перекриття. Модель колони одного поверху представлена у вигляді набору з 10 стержневих скінченних елементів з шістьма ступенями вільності у вузлі. Плити подані як сукупність плоских чотирикутних скінченних елементів (20х20) з шістьма

ступенями вільності у вузлі. Скінченно-елементна модель каркасної будівлі містить 2389 вузлів та 2200 елементів.

Математична модель сейсмічних коливань каркасної будівлі сформована на основі принципу Даламбера-Лагранжа у вигляді системи незв'язаних диференціальних рівнянь другого порядку в узагальнених координатах з багатьма ступенями вільності

$$\ddot{y}_i(t) + 2\xi_i\omega_i\dot{y}_i(t) + \omega_i^2 y_i(t) = a_{gfi}(t), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (1)$$

де  $y_i(t)$  – узагальнена координата,  $\omega_i$  – власні частоти коливань каркасної будівлі,  $\xi_i$  – коефіцієнт демпфірування,  $a_{gfi}(t)$  – випадкове прискорення ґрунту на рівні фундаменту,  $n$  – кількість утриманих в розрахунках ступенів вільності будівлі.

Власні частоти коливань будівлі  $\omega_i$  визначено за допомогою методу Ланцоша, який реалізовано в комплексі NASTRAN, при розв'язанні задачі на власні значення (*Modes*)

$$(K - \omega_i^2 M)\bar{\varphi}_i = 0. \quad (2)$$

Тут  $M, K$  – відповідно матриці мас та жорсткості конструкції;  $\bar{\varphi}_i$  – система векторів власних форм коливань, яка є ортогональною

$$\begin{aligned} \bar{\varphi}_j^T M \bar{\varphi}_i &= 0, \\ \bar{\varphi}_j^T K \bar{\varphi}_i &= 0. \end{aligned} \quad (i \neq j). \quad (3)$$

Узагальнені матриці мас, жорсткості і демпфірування обчислені за формулами

$$\begin{aligned} M^* &= \Phi^T M \Phi = E = \text{diag}(1, 1, \dots, 1), \\ C^* &= \Phi^T C \Phi = \text{diag}(2\varepsilon_1\omega_1, 2\varepsilon_2\omega_2, \dots, 2\varepsilon_n\omega_n, \dots, 2\varepsilon_n\omega_n), \\ K^* &= \Phi^T K \Phi = \text{diag}(\omega_1^2, \omega_2^2, \dots, \omega_i^2, \dots, \omega_n^2). \end{aligned} \quad (4)$$

В системі (1) дія сейсмічного впливу врахована у вигляді імовірнісної моделі прискорення ґрунту  $a_{gfi}(t)$  та реакції будівлі на горизонтальне сейсмічне переміщення ґрунту після початку землетрусу згідно рекомендацій Курзанова А.М. [5]. За допомогою статистичного підходу Руїза та Пензієна [3] із застосуванням програми Mathcad сформована модель прискорення ґрунту у вигляді випадкових реалізацій, які прикладені в місцях кріплення колон першого поверху до фундаменту вздовж однієї осі. Згідно даної моделі сейсмічні хвилі поширюються в земній корі та наштовкуються на абсолютно тверду поверхню („скелю”). Вибіркова функція прискорення „скелі” є результатом множення згладженої квазіобвідної функції на вибірккову функцію, що генерується у вигляді послідовності незалежних гаусівських ординат з тими самими середніми значеннями і дисперсіями. Далі вони фільтруються м'яким шаром і досягають фундаменту будівлі.

Поперечна згинальна хвиля в колонах будівлі задана синусоїдою з максимальною амплітудою сейсмічного горизонтального переміщення ґрунту  $A$ , частотою рухомої хвилі  $\tilde{\omega}$  і запізненням хвилі  $\tau$  в колоні:

$$x(t) = A(t) \sin \tilde{\omega}(t - \tau), \quad (5)$$

де  $A(t)$  – амплітуда горизонтального переміщення ґрунту,  $\tilde{\omega} = 2\pi / \tilde{T}$  – частота рухомої хвилі,  $\tilde{T} = 2\pi \sqrt{A(t)/a(t)}$  – період поперечних згинальних коливань колони,  $\tau = z/\tilde{v}(t)$  – запізнення рухомої хвилі,  $\tilde{v}(t) = \sqrt{EI\tilde{\omega}/m}$  – швидкість хвилі,  $z$  – вертикальна координата колони,  $EI$  – згинальна жорсткість колони,  $m$  – погонна маса колони з урахуванням однієї четвертої маси плити перекриття. Максимальні значення прискорення і горизонтальних переміщень ґрунту прийняті згідно рекомендацій [5] відповідно до магнітуди сейсмічного впливу М7:  $a=0,1g=0,981 \text{ м/с}^2$ ,  $A=0,04 \text{ м}$ ; М8:  $a=0,2, g=1,962 \text{ м/с}^2$ ,  $A=0,08 \text{ м}$ ; М9:  $a=0,4g=3,924 \text{ м/с}^2$ ,  $A=0,16 \text{ м}$ .

Поперечні згинальні хвилі представлені у вигляді початкових горизонтальних відхилень від вертикалі усіх вузлів колон будівлі в напрямку дії сейсмічного впливу, амплітуди яких обчислені при  $t = \tilde{T}$  [5].

В статті оцінено вплив хвильової реакції каркасної будівлі на напружено-деформований стан і стійкість при дії статичного рівномірно розподіленого постійного і короткочасного навантаження на плити перекриття.

## 2. Застосування методів вейвлет-аналізу при дослідженні сейсмічного впливу та відгуків каркасної будівлі

Доведено, що при дослідженні нестационарних стохастичних сигналів методи вейвлет-аналізу мають переваги порівняно з традиційним апаратом наближення функцій на основі рядів Фур'є [1], бо дозволяють аналізувати їх в частотно-часовому просторі. В системі Mathcad реалізовані функції декомпозиції та синтезу сигналів на основі діадного дискретного вейвлет-перетворення (DWT) вейвлетом Добеші 4 четвертого порядку. Введені значення параметрів  $a$  і  $b$  у вигляді степеневих функцій

$$a = 2^m, \quad b = k \cdot 2^m, \quad \psi_{mk} = \frac{1}{\sqrt{a}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) = \frac{1}{\sqrt{2^m}} \psi\left(2^{-m}t - k\right), \quad (6)$$

де  $m$  і  $k$  – відповідно параметри масштабу по частоті та зсуву за часом (цілі числа).

Базис в дискретному представленні має вигляд

$$\psi_{mk} = |a|^{-m/2} \psi\left(a^{-m}t - k\right). \quad (7)$$

Вейвлет-коефіцієнти прямого перетворення набувають вигляду

$$C_{mk} = \int_{-\infty}^{+\infty} S(t) \psi_{mk}(t) dt, \quad (8)$$

де  $S(t)$  – випадкова реалізація сейсмічного впливу.

У статті результати вейвлет-аналізу сейсмічного прискорення ґрунту та сейсмічних відгуків каркасної будівлі представлені у вигляді вейвлет-спектрограм в тривимірному просторі з локалізацією екстремумів вейвлет-коефіцієнтів.

Результати вейвлет-аналізу стохастичних сигналів можуть бути подані у вигляді Фур'є-образів. Для цього в статті виконано вейвлет-перетворення сигналів за допомогою неперервних неортогональних одновимірних комплексних вейвлет-функцій Морле, які мають вид

$$W(a,b) = \left( S(t), \psi_{ab}(t) \right) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{+\infty} S(t) \psi((t-b)/a) dt, \quad (9)$$

де  $C_\psi$  – нормуючий коефіцієнт

$$C_\psi = \int_{-\infty}^{+\infty} |\Psi(\omega)|^2 |\omega|^{-1} d\omega < \infty, \quad (10)$$

$\psi(\omega)$  – Фур'є-перетворення вейвлета  $\psi(t)$ .

Візуалізація Фур'є-образів сейсмічного впливу та сейсмічних відгуків будівлі виконана в осях „період коливань – вейвлет-коефіцієнт прямого перетворення”.

### 3. Нелінійна задача статички каркасної будівлі при дії поверхневого тиску

Нелінійна задача статички (*Nonlinear Static*) будівлі реалізована в комплексі NASTRAN у вигляді скінченно-елементної апроксимації принципу можливих переміщень Лагранжа, яка розв'язана за допомогою методу Ньютона-Рафсона [9]. Оцінено напружено-деформований стан будівлі без і з урахуванням хвильової реакції в колонах від сейсмічного впливу різної магнітуди (M7, M8, M9) при дії розрахункового поверхневого тиску  $q=10$  кПа та втраті стійкості будівлі (в граничному стані). В табл. 1 наведено лінійні та кутові переміщення вузлів колони №1 в місцях кріплення плит перекриття будівлі при дії поверхневого тиску  $q=10$  кПа.

Таблиця 1

Переміщення вузлів колони №1 по висоті будівлі на рівні плит перекриття при дії поверхневого тиску  $q=10$  кПа

Переміщення	0*	M7	M8	M9
Вздовж осі x, мм	0,016;0,003;0,006; 0,004; <b>0,024</b>	0,53;1,31; <b>1,66</b> ; 1,6;1,34	1,06;2,59; <b>3,32</b> ; 3,19;2,69	2,13;5,19; <b>6,64</b> ; 6,38;5,39
Вздовж осі y, мм	0,016;0,003;0,006; 0,004; <b>0,024</b>	0,003;0;0,001; 0,004; <b>0,01</b>	0,003;0;-0,001; -0,005;- <b>0,011</b>	0;0;0,001; 0,005; <b>0,011</b>
Вздовж осі z, мм	0,27;0,5;0,67; 0,78; <b>0,84</b>	0,29;0,47;0,69; 0,75; <b>0,86</b>	0,3;0,54;0,72; 0,83; <b>0,89</b>	0,36;0,66;0,84; 0,96; <b>1,04</b>
Кутове навколо осі x, 10 <sup>3</sup> рад	0,16;0,1;0,13; 0,064; <b>0,32</b>	0,19;1,15;0,17; 0,10;0,39	0,19;0,14;0,17; <b>0,98</b> ;0,40	0,19;0,14;0,17; 0,11; <b>0,41</b>
Кутове навколо осі y, 10 <sup>3</sup> рад	-0,16;-0,1;-0,13; -0,064;- <b>0,32</b>	0,07;1,38;-0,13; -0,25;-0,48	0,33;0,25;-0,09; -0,22;- <b>0,56</b>	<b>0,85</b> ;0,64;-0,01; -0,35;-0,72
Кутове навколо осі z, 10 <sup>3</sup> рад	0	0;0;0,08; 0,10; <b>0,13</b>	0,03;0,08;0,16; 0,23; <b>0,26</b>	0,05;0,16;0,32; 0,46; <b>0,52</b>
0* – без урахування хвильової реакції				

Як видно з таблиці, хвильова реакція будівлі на горизонтальне сейсмічне переміщення ґрунту викликає несиметричність деформування колони, яка спостерігалась в ній без урахування хвильової реакції (0\*). Максимальні значення горизонтального переміщення вздовж осі x спостерігаються у вузлі

колони на рівні плити третього поверху, вздовж осей  $y$  та  $z$  – на рівні п'ятого поверху. Кутові переміщення вздовж осі  $z$  виникають в колоні за рахунок урахування поперечної згинальної хвилі і збільшуються зі збільшенням магнітуди сейсмічного впливу. Їх максимальні значення спостерігаються у вузлі колони на рівні п'ятого поверху.

В табл. 2 наведено лінійні та кутові переміщення центральних вузлів плит перекриття по висоті будівлі при дії поверхневого тиску  $q=10$  кПа.

Таблиця 2  
Переміщення центральних вузлів плит перекриття по висоті будівлі при дії поверхневого тиску  $q=10$  кПа

Переміщення	0*	M7	M8	M9
Вздовж осі $x$ , мм	0	0,53;1,3;1,66; 1,6;1,35	1,06;2,59;3,32; 3,19;2,7	2,12;5,19;6,64; 6,38;5,4
Вздовж осі $z$ , мм	10,6;10,7;10,9; 11,0;11,4	10,6;10,8;11,0; 11,0;11,4	10,6;10,8;11,0; 11,0;11,4	10,6;10,9;11,1; 11,1;11,6
Кутове навколо осі $y$ , $10^{-3}$ рад	0	-0,017;0,013;0,002; 0,004;0,005	-0,033;-0,025;-0,005; 0,008;0,011	-0,068;-0,051; 0,009; 0,017;0,022

0\* – без урахування хвильової реакції

Видно, що хвильова реакція будівлі викликає лінійні переміщення центральних вузлів плит перекриття вздовж осі  $x$  та кутові переміщення навколо осі  $y$ . На лінійні переміщення вздовж осі  $z$  хвильова реакція впливає лише при сейсмічному впливі магнітудою M9. В табл. 2 не наведені переміщення, значення яких у всіх випадках дорівнюють нулю.

На рис. 1 представлені криві навантаження будівлі поверхневим тиском  $q=160$  кПа для центрального вузла плити п'ятого поверху, в якому спостерігаються максимальні вертикальні переміщення (а), та верхнього вузла колони №1 (б).

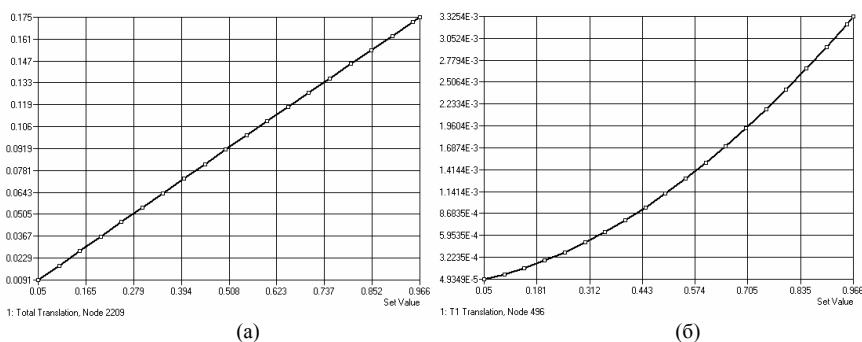


Рис. 1. Крива навантаження будівлі при дії поверхневого тиску без урахування хвильової реакції: (а) – центральний вузол верхньої плити, (б) – верхній вузол колони

Критичне (граничне) значення поверхневого тиску для каркасної будівлі без урахування поперечної згинальної хвилі складо  $q_{кр} = 0,966 \cdot 160 = 154,66$  кПа. При розв'язанні нелінійної задачі статички (Nonlinear Static) будівлі з урахуванням хвильової реакції на сейсмічний



вплив різної магнітуди ( $M7, M8, M9$ ) отримано критичні (граничні) значення поверхневого тиску, які відповідно дорівнюють  $q_{кр} = [95,957; 92,255; 88,745]$  кПа. Бачимо, що за рахунок урахування поперечної згинальної хвильової реакції критичне (граничне) значення навантаження зменшилось на 43%. На рис. 2 представлено деформований стан каркасної будівлі без і з урахуванням хвильової реакції на сейсмічний вплив різної магнітуди.

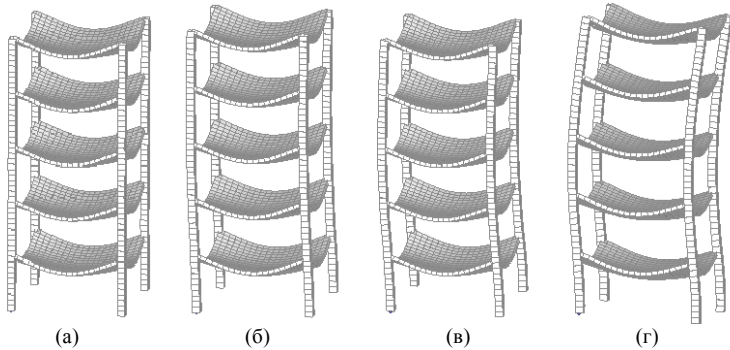


Рис. 2. Деформований стан каркасної будівлі при дії поверхневого тиску в граничному стані: (а) – без урахування хвильової реакції, (б), (в), (г) – при врахуванні хвильової реакції на сейсмічний вплив магнітудою  $M7, M8, M9$  відповідно

В табл. 3 наведено статичні характеристики будівлі: згинальні моменти ( $M$ ), перерізуючі сили ( $Q$ ) та максимальні повздовжні сили в колонах ( $N$ ) у місцях жорсткого з'єднання колон з фундаментом при дії поверхневого тиску  $q = 10$  кПа та втраті стійкості будівлі (в граничному стані).

Таблиця 3

Статичні характеристики будівлі в місцях з'єднання колон з фундаментом при дії поверхневого тиску на плити перекриття

Характеристики	0*				M7			
	1	2	3	4	1	2	3	4
Згинальний момент, кНм	7,374 47,496	7,374 47,496	7,374 47,496	7,374 47,496	18,748 145,6	18,748 145,6	7,344 57,12	7,344 57,12
Перерізуюча сила, кН	7,656 80,761	-7,656 -80,761	-7,656 -80,761	7,656 80,761	7,687 56,41	-7,687 -56,41	-7,625 -55,66	7,625 55,66
Повздовжня сила, кН	449,99 6952,3	449,99 6952,3	449,99 6952,3	449,99 6952,3	451,05 4001,7	451,05 4001,7	448,97 3983,2	448,97 3983,2
	M8				M9			
Згинальний момент, кНм	30,424 255,19	30,424 255,19	15,063 165,19	15,063 165,19	52,869 483,14	52,869 483,14	38,108 391,74	38,108 391,74
Перерізуюча сила, кН	7,883 58,49	-7,883 -58,49	-7,765 -56,93	7,765 56,93	7,774 61,09	-7,774 -61,09	-7,529 -57,79	7,529 57,79
Повздовжня сила, кН	452,08 4169,5	452,08 4169,5	447,92 4131,1	447,92 4131,1	454,16 4355,7	454,16 4355,7	445,84 4275,8	445,84 4275,8
0* – без урахування хвильової реакції, ** – з урахуванням рухомої хвилі при $q = 10$ кПа *** – з урахуванням рухомої хвилі в граничному стані								

Бачимо, що поперечні згинальні хвилі в колонах викликають несиметричну статичну реакцію на дію поверхневого тиску. Зі

збільшенням магнітуди сейсмічного впливу особливо збільшуються згинальні моменти відносно осі  $y$ .

#### 4. Модальний аналіз каркасної будівлі

За допомогою методу Ланцоша (*Modes*), який реалізовано в комплексі NASTRAN, виконано модальний аналіз каркасної будівлі без і з урахуванням поперечної згинальної хвилі різної амплітуди згідно виразу (2). Значення перших десяти власних частот коливань будівлі представлено в табл. 4.

Таблиця 4

Частоти власних коливань каркасної будівлі, Гц

№	0*	M7	M8	M9
1	<b>0,854317</b>	0,854278	0,854162	0,853696
2	<b>0,854317</b>	0,854307	0,854279	0,854165
3	1,254049	1,254045	1,254033	1,253984
4	<b>3,320098</b>	3,319336	3,317953	3,307964
5	<b>3,320098</b>	3,319686	3,318451	3,313525
6	4,908278	4,907590	4,905529	4,897331
7	<b>7,728268</b>	7,725592	7,717831	7,689884
8	<b>7,728268</b>	7,727540	7,725360	7,716683
9	7,864224	7,865068	7,867489	7,876089
10	8,075492	8,077710	8,081637	8,095768

0\* – без урахування хвильової реакції будівлі

Бачимо, що урахування хвильової реакції майже не впливає на зміну значень власних частот коливань будівлі, але розщепляє кратні власні частоти (1, 2; 4, 5; 7, 8). Зі збільшенням амплітуди поперечної згинальної хвилі, яка пов'язана з магнітудою сейсмічного впливу, значення перших сімох власних частот коливань будівлі зменшуються лише на 0,2%, а значення восьмої і дев'ятої – збільшуються на 0,25%. В табл. 5 наведено максимальні відносні горизонтальні переміщення в напрямку дії сейсмічного впливу (осі  $x$ ) каркасної будівлі по власних формах коливань.

Видно, що будівля з урахуванням хвильової реакції змінює форму деформування по кратних частотах коливань. Спостерігаються максимальні горизонтальні переміщення будівлі по другій (замість першої), по п'ятій (замість четвертої) власних формах коливань. По дев'ятій та десятій власних формах коливань зі збільшенням амплітуди поперечної згинальної хвильової реакції будівлі спостерігається збільшення значення відносного горизонтального переміщення у 5,2 та 7,8 разів відповідно.

Таблиця 5

Максимальні відносні горизонтальні вузлові переміщення каркасної будівлі по власних формах коливань

Урахування хвильової реакції	Номер власної форми коливань				
	1	2	3	4	5
0*	0,004711	0,000467	0,00501	0,004102	0,000423
M7	0,000019	0,004734	0,00501	0,000025	0,004134
M8	0,000038	0,004734	0,00501	0,000045	0,004132
M9	0,000076	0,004734	0,00501	0,000084	0,004126
	6	7	8	9	10
0*	0,004667	0,004147	0,000136	0,000128	0,000123
M7	0,004678	0,004131	0,000033	0,000238	0,000381
M8	0,004677	0,003726	0,000038	0,000430	0,000601
M9	0,004676	0,003923	0,000048	0,000663	0,000959

0\* – без урахування хвильової реакції будівлі

Як приклад, на рис. 3 наведені перші десять власних форм коливань будівлі з урахуванням хвильової реакції на сейсмічний вплив магнітудою M9.

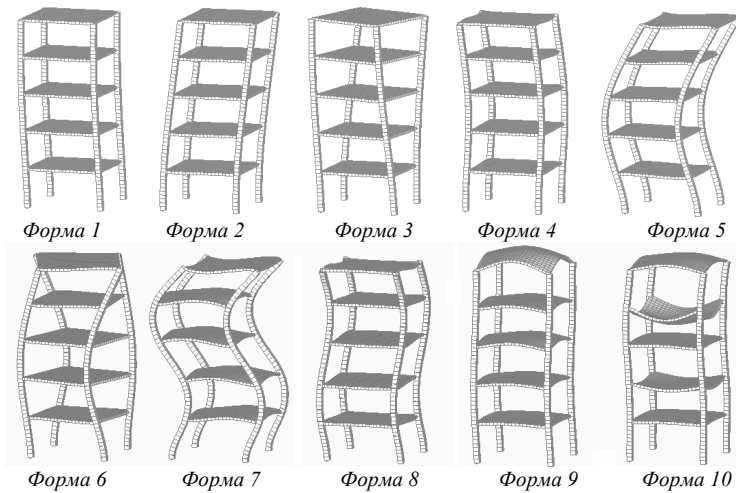


Рис. 3. Перші десять власних форм коливань каркасної будівлі з урахуванням хвильової реакції на сейсмічний вплив (M9)

### 5. Дослідження сейсмічних відгуків каркасної будівлі

Нестационарні стохастичні коливання будівлі без і з урахуванням поперечних згинальних хвиль в колонах подані у вигляді десяти незв'язаних диференціальних рівнянь руху другого порядку в узагальнених координатах (1). Коефіцієнт демпфірування приймався рівним  $\xi = 0,02$  для всіх власних частот коливань. За допомогою прямого методу чисельного інтегрування Рунге-Кутта четвертого порядку отримано сейсмічні відгуки будівлі у вигляді узагальнених переміщень, узагальнених швидкостей та узагальнених прискорень. Максимальні значення прискорень, швидкостей та переміщень вузлів моделі будівлі вздовж осі дії сейсмічного навантаження (осі  $x$ ) визначені з урахуванням відповідних власних форм коливань.

Згідно формул (6) - (10) виконано вейвлет-аналіз стохастичних реалізацій сейсмічного впливу та сейсмічних відгуків будівлі. На рис. 4, як приклад, представлена випадкова реалізація прискорення ґрунту (M7), її вейвлет-спектрограма у вигляді поверхні  $ab$  в тривимірному просторі з локалізацією екстремумів вейвлет-коефіцієнтів та Фур'є-образ в осях „період коливань – вейвлет-коефіцієнт прямого перетворення”.

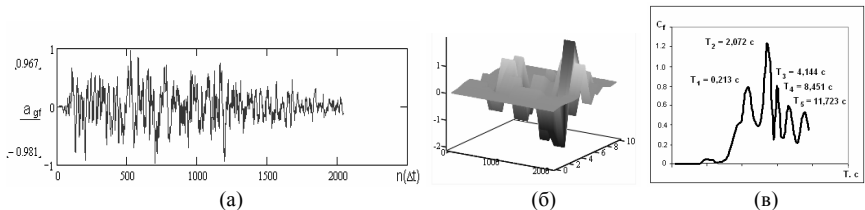


Рис. 4. Реалізація прискорення ґрунту (а) при сейсмічному впливі (M7), її вейвлет-спектрограма (б) та Фур'є-образ (в)

Як приклад, на рис. 5 представлена максимальна сейсмічна реакція (прискорення - (а), (б); швидкість - (в), (г); горизонтальне переміщення - (д), (е)) будівлі без урахування в ній поперечних згинальних хвиль на сейсмічний вплив (M7), яка спостерігалась у верхньому вузлі колони відповідно по першій та шостій власних формах коливань.

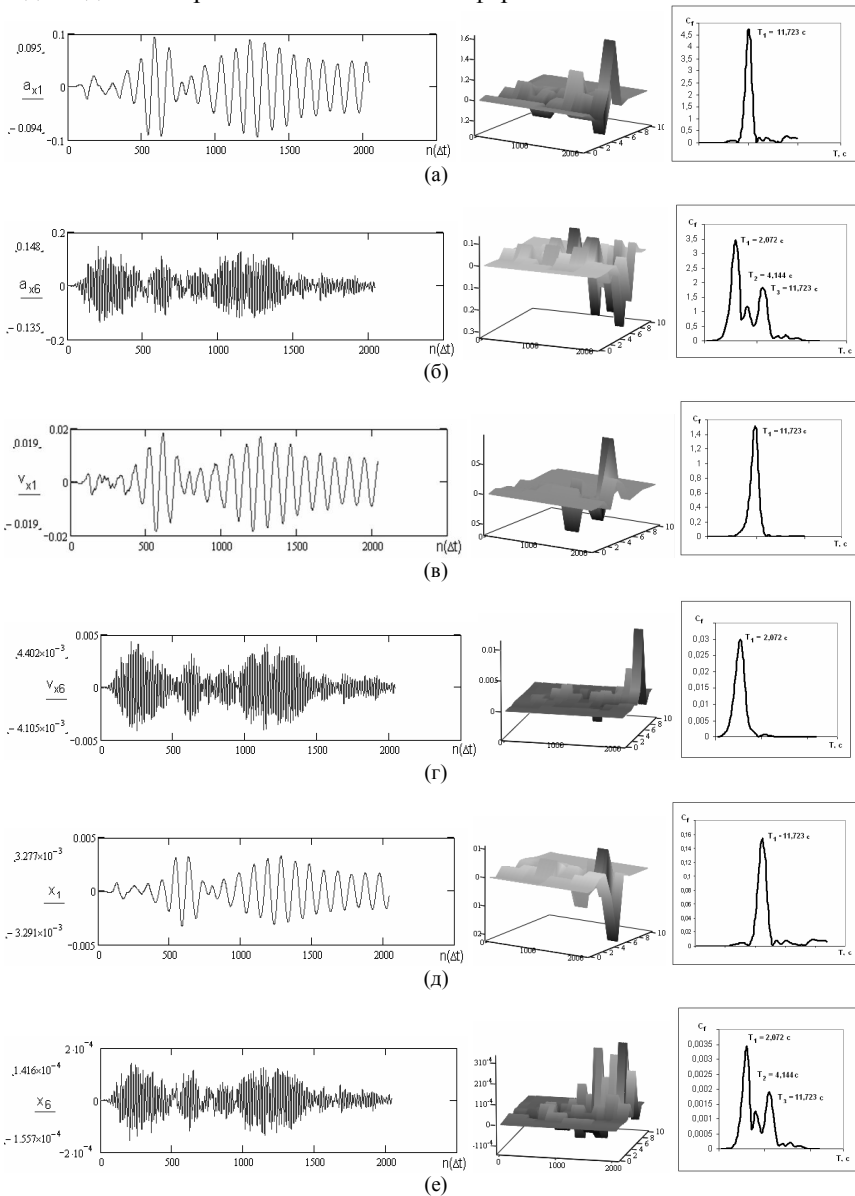


Рис. 5. Реакція верхнього вузла колони будівлі на сейсмічний вплив (M7) без урахування поперечних згинальних хвиль: (а), (б) – прискорення; (в), (г) – швидкість; (д), (е) – горизонтальне переміщення по першій та шостій формам власних коливань відповідно

Бачимо, що локалізація в часі піків максимальних значень вейвлет-коефіцієнтів динамічних характеристик верхнього вузла колони №1 по першій та шостій формах власних коливань не завжди збігаються. Тому в методі суперпозиції форм для отримання сумарних значень прискорення, швидкості та переміщення треба враховувати неспівпадіння локалізації їх у часі [8]. В табл. 6 наведені результати динамічного розрахунку конструкції: максимальні значення прискорень, швидкостей і переміщень верхнього вузла колони в напрямку дії сейсмічного впливу (осі  $x$ ).

Таблиця 6

Максимальні динамічні характеристики верхнього вузла колони №1

Динамічні характеристики	M7	M8	M9
Прискорення, $m/s^2$	0,044/0,045	0,089/0,092	0,181/0,187
Швидкість, $m/s$	0,004/0,005	0,009/0,010	0,019/0,021
Переміщення вздовж осі $x$ , $mm$	0,607/0,622	1,215/1,245	2,432/2,498
*/** – без/з урахуванням хвильової реакції конструкції на сейсмічний вплив			

Спостерігаємо збільшення динамічних характеристик вузла колони за рахунок збільшення магнітуди сейсмічного впливу. Але урахування поперечних згинальних хвильових реакцій мало впливає на максимальні значення прискорення, швидкості і переміщення вздовж осі  $x$  (1,24%) верхнього вузла колони. Сумарне максимальне горизонтальне переміщення верхнього вузла колони №1 вздовж дії сейсмічного впливу (осі  $x$ ) значно збільшується за рахунок статичного переміщення від дії поверхневого тиску при врахуванні поперечної згинальної хвилі.

### Висновок

При дії поверхневого тиску на плити перекриття каркасної будівлі зі збільшенням магнітуди сейсмічного впливу зменшується несуча спроможність конструкції. Врахування поперечних згинальних хвиль в колонах значно впливають на згинальні моменти в місцях кріплення колон до фундаменту і викликає нерівномірну деформацію усєї будівлі. Модальний аналіз виявив розщеплення кратних власних частот коливань будівлі та відмінність власних форм за рахунок урахування хвильових реакцій в колонах. Аналіз сейсмічних реакцій каркасної будівлі показав, що моделювання рухомих хвиль в колонах мало вплинуло на динамічні характеристики конструкції. Вейвлет-аналіз сейсмічного впливу і реакцій каркасної будівлі дозволив якісно дослідити локалізацію максимальних значень в частотно-часовому просторі і надати рекомендації до методу суперпозиції форм. Дослідження показало, що хвильову реакцію багатоповерхових каркасних будівель на горизонтальне сейсмічне переміщення ґрунту слід враховувати в розрахунках на сейсмічний вплив. Особливо це стосується каркасних будівель з багатьма прольотами, оскільки швидкість хвиль в колонах буде різною і залежатиме від збільшення кількості плит перекриття, що спираються на них.

## СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Добеши И.* Десять лекций по вейвлетам / пер. с англ. Е. Мищенко; под ред. А. Петухова. Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001. – 454 с.
2. *Клаф Р., Пензиен Дж.* Динамика сооружений. – М.: Стройиздат, 1979. – 320 с.
3. *Августин Г., Баратта А., Кашиами Ф.* Вероятностные методы в строительном проектировании. – М.: Стройиздат, 1988. – 584 с.
4. ДБН В.1.1-12:2014. Будівництво у сейсмічних районах України. – К.: Мінрегіон України, 2014. – IV. – 110 с.
5. *Курзанов А.М.* Предложения по нормативному расчету сооружений на волновую сейсмическую нагрузку // Промышленное и гражданское строительство, 2010. – № 9. – С. 54-55.
6. *Немчинов Ю.І., Хавкін О.К., Мар'янков М.Г.* та ін. Практичні питання динаміки будівель // Будівництво України, 2013. – №6. – С. 6-21.
7. *Лук'яненко О.О., Ворона Ю.В., Костіна О.В., Геращенко О.В.* Застосування вейвлет-аналізу до моделювання стохастичної поведінки пружних систем при сейсмічному впливі // Опір матеріалів і теорія споруд. – К: КНУБА, 2017. – Вип. 99. – С. 160–180.
8. *Лук'яненко О.О., Костіна О.В., Геращенко О.В.* Дослідження сейсмічної хвильової реакції просторової конструкції // Опір матеріалів і теорія споруд: наук.-тех. збірн. – К.: КНУБА, 2018. – Вип. 101. – С. 83-102.
9. *Шимкович Д.Г.* Расчет конструкций в MSC/NASTRAN for Windows. – М.: ДМК Пресс, 2001. – 448 с.

## REFERENCES

1. *Daubechies I.* Desyat' lektсий po veyvletam [Ten Lectures on Wavelets]. Izhevsk, NITs «Regulyarnaya i khaoticheskaya dinamika» publ., 2001, 454 p. (rus).
2. *Clough R., Penzien J.* Dinamika sooruzheniy [Dynamics of structures]. – М.: Stroyizdat, 1979. – 320 p. (rus)
3. *Augusti G., Baratta A., Kashiati F.* Veroyatnostnyie metody v stroitelnom proektirovanii [Probabilistic methods in building design]. – М.: Stroyizdat, 1988. – 584 s. (rus)
4. DBN V.1.1-12:2014. Derzhavni budivelni normy Ukrainy. Budivnytstvo u seysmichnykh rayonakh Ukrainy [National Structural Rules and Regulations. Construction in the seismic regions of Ukraine] – К.: Minrehion Ukrainy, 2014. – IV. – 110 s. (ukr).
5. *Kurzanov A.M.* Predlozheniya po normativnomu raschetu sooruzheniy na volnovuyu seysmicheskuyu nagruzku [Proposals for the normative analysis of constructions under wave seismic loading] // Promyshlennoe i grazhdanskoe stroitelstvo, 2010. – № 9. – S. 54-55. (rus).
6. *Nemchynov Yu.I., Khavkin O.K., Mar'yankov M.H.* ta in. Praktychni pytannya dynamiky budivel' [Practical issues of buildings dynamics] // Budivnytstvo Ukrainy, 2013. – #6. – S. 6-21. (ukr)
7. *Lukianchenko O.O., Vorona Yu.V., Kostina O.V., Geraschenko O.V.* Zastosuvannya veyvlet-analizu do modelyuvannya stokastychnoyi povedinky pruzhnyx system pry seysmichnomu vplyvi [Application of wavelet analysis to the modeling of elastic systems stochastic behavior under seismic loading] // Opir materialiv i teoriia sporud: nauk.-tekh. zbirn.– К: KNUBA, 2017. – Vyp. 99. – P. 160–180. (ukr)
8. *Lukianchenko O.O., Kostina O.V., Geraschenko O.V.* Doslidzhennia seismichnoi khyvlovoi reaktsii prostоровoi konstruktsii [Study of seismic wave reaction of spatial structure] // Opir materialiv i teoriia sporud: nauk.-tekh. zbirn.– К: KNUBA, 2018. – Vyp. 101. – P. 83-102. (ukr)
9. *Shimkovich D.G.* Raschet konstruktsiy v MSC/NASTRAN for Windows [Structural analysis in MSC/NASTRAN for Windows] - М.: ДМК Press, 2001.- 448 p. (rus)

Стаття надійшла 11.08.2019

*Lukianchenko O.O., Vorona Yu.V., Kostina O.V.*

#### **WAVELET ANALYSIS OF SEISMIC WAVE RESPONSE OF FRAMED BUILDING**

The application of new and effective wavelet methods to the analysis of seismic responses of structures is a time-consuming task. The article investigates the effectiveness of a new numerical approach to calculating the seismic response of a multi-storey frame building. The approach is based on the theory and methods of nonlinear mechanics, method of traveling wave and wavelet analysis. Seismic loads are represented as random realizations of accelerations of soil with different magnitudes, obtained by the statistical model of Ruiz and Penzien. Another component of seismic loads is the wave response of the building to horizontal seismic movement of the ground. A mathematical model of non-stationary stochastic oscillations of a building has the form of a system of second-order differential equations in generalized coordinates. The model is constructed with the use of a finite element method. The wave response of the building is represented by transverse bending waves in columns whose amplitude corresponded to the magnitude of the seismic action. The static behavior and stability of the framed building under the action of surface pressure on the floor slabs were investigated in nonlinear formulation by the Newton-Rafson method. The modal analysis of the building was performed using the Lanzos method. The dynamic behavior of the building was investigated using the fourth-order Runge-Kutta method. The wavelet analysis of realizations of seismic impact and seismic reactions of a framed building was performed with the use of discrete orthogonal (Daubechies 4) and continuous non-orthogonal (Morlet) one-dimensional complex wavelet functions. Visualization of the seismic impact and seismic response of the building is presented in the form of wavelet spectrograms and Fourier images. The expediency of taking into account the transverse bending waves in the columns of a multi-storey frame building when studying its seismic behavior is confirmed. This is especially true for frame buildings with many spans because of the dependency of the wave speed in the columns on the number of floor slabs resting on them.

**Keywords:** wavelet analysis, framed building, finite element method, nonlinear mechanics, seismic load, traveling wave theory.

*Лукьянченко О.А., Ворона Ю.В., Костина Е.В.*

#### **ВЕЙВЛЕТ-АНАЛИЗ СЕЙСМИЧЕСКОЙ ВОЛНОВОЙ РЕАКЦИИ КАРКАСНОГО ЗДАНИЯ**

Применение новых и эффективных методов, к которым относятся вейвлет-методы, для анализа сейсмических реакций строительных сооружений является требованием времени. В статье исследована эффективность нового численного подхода к расчету сейсмической реакции многоэтажного каркасного здания, основанного на теории и методах нелинейной механики, бегущей волны и вейвлет-анализа. Сейсмическое воздействие представлено в виде случайных реализаций ускорения грунта различной магнитуды, полученных с помощью статистического подхода Руиза и Пензиена, и волновой реакции здания на горизонтальное сейсмическое перемещение грунта. С помощью программного комплекса конечно-элементного анализа построена математическая модель нестационарных стохастических колебаний здания в виде системы дифференциальных уравнений второго порядка в обобщенных координатах. Волновая реакция здания представлена в виде поперечных изгибающих волн в колоннах, амплитуда которых соответствовала магнитуде сейсмического воздействия. Исследовано статическое поведение и устойчивость каркасного здания при действии поверхностного давления на плиты перекрытия в нелинейной постановке методом Ньютона-Рафсона. Модальный анализ здания выполнен с помощью метода Ланцоша. Динамическое поведение здания исследовано методом Рунге-Кутты четвертого порядка. Выполнен вейвлет-анализ реализаций сейсмического воздействия и сейсмических реакций каркасного здания с применением дискретных ортогональных (Добеши 4) и непрерывных неортогональных (Морле) одномерных комплексных вейвлет-функций. Визуализация сейсмического воздействия и сейсмической реакции здания представлена в виде вейвлет-спектрограмм и Фурье-образов. Подтверждена целесообразность учета поперечных изгибающих волн в колоннах многоэтажного каркасного здания при исследовании его сейсмического поведения. Особенно это касается каркасных зданий со многими пролетами, потому что скорость волн в колоннах будет разной и зависеть от увеличения количества плит перекрытия, опирающихся на них.

**Ключевые слова:** вейвлет-анализ, каркасное здание, метод конечных элементов, нелинейная механика, сейсмическое воздействие, теория бегущей волны.

УДК 539.3

Лук'янченко О.О., Ворона Ю.В., Костіна О.В. **Вейвлет-аналіз сейсмічної хвильової реакції каркасної будівлі** // Опір матеріалів і теорія споруд: наук.-тех. збірн. – К.: КНУБА, 2019. – Вип. 103. – С. 131-144.

*Досліджена стохастична реакція багатопверхового каркасного будинку на сейсмічний вплив. Запропоновано новий чисельний підхід, заснований на теорії та методах нелінійної механіки, скінченних елементів, рухомої хвилі та вейвлет-аналізу.*

Табл. 6. Іл. 5. Бібліогр. 9 назв.

Lukianchenko O.O., Vorona Yu.V., Kostina O.V. **Wavelet analysis of seismic wave reaction of frame building** // Strength of Materials and Theory of Structures. – 2019. – Issue. 103. – P. 131-144.

*The stochastic response of a multi-storey frame building to seismic load was investigated. A new numerical approach based on the theory and methods of nonlinear mechanics, finite elements, traveling waves and wavelet analysis is proposed.*

Tab. 6. Fig. 5. References 9 items.

Лук'янченко О.А., Ворона Ю.В., Костіна Е.В. **Вейвлет-анализ сейсмической волновой реакции каркасного здания** // Сопrotивление материалов и теория сооружений: науч.-тех. сборн. – К.: КНУСА, 2019. – Вып. 103. – С. 131-144. – Укр.

*Исследована стохастическая реакция многоэтажного каркасного здания на сейсмическое воздействие. Предложен новый численный подход, основанный на теории и методах нелинейной механики, конечных элементов, бегущей волны и вейвлет-анализа.*

Табл. 6. Ил. 5. Библиогр. 9 назв.

**Автор (науковий ступінь, вчене звання, посада):** кандидат технічних наук, старший науковий співробітник НДІ будівельної механіки КНУБА, ЛУК'ЯНЧЕНКО Ольга Олександрівна.

**Адреса:** 03680 Україна, м. Київ, Повітрофлотський проспект 31, Київський національний університет будівництва і архітектури, ЛУК'ЯНЧЕНКО Ользі Олександрівні.

**Тел.:** +38(044) 241-54-20.

**Мобільний тел.:** +38(095) 727-18-25.

**Імейл:** [lukianchenko.oo@knuba.edu.ua](mailto:lukianchenko.oo@knuba.edu.ua)

**ORCID ID:** <http://orcid.org/0000-0003-1794-6030>

**Автор (науковий ступінь, вчене звання, посада):** кандидат технічних наук, старший науковий співробітник, професор кафедри будівельної механіки КНУБА ВОРОНА Юрій Володимирович

**Адреса робоча:** 03680, Київ, Повітрофлотський пр. 31, Київський національний університет будівництва і архітектури, ВОРОНИ Юрію Володимировичу

**Робочий тел.:** +38(044) 245-48-29

**Мобільний тел.:** +38(050)750-13-61

**Імейл:** [vorona.iuv@knuba.edu.ua](mailto:vorona.iuv@knuba.edu.ua)

**ORCID ID:** <http://orcid.org/0000-0001-8130-7204>

**Автор (науковий ступінь, вчене звання, посада):** кандидат технічних наук, доцент кафедри будівельної механіки КНУБА, КОСТІНА Олена Володимирівна.

**Адреса робоча:** 03680 Україна, м. Київ, Повітрофлотський проспект 31, Київський національний університет будівництва і архітектури, КОСТІНІЙ Олені Володимирівні.

**Робочий тел.:** +38(044) 241-54-20.

**Мобільний тел.:** +38(098) 275-19-93.

**Імейл:** [kostina.ov@knuba.edu.ua](mailto:kostina.ov@knuba.edu.ua)

**ORCID ID:** <http://orcid.org/0000-0002-6692-6231>



УДК 531.66

## РОЗРАХУНОК БРОНЕСТІЙКОСТІ МЕТАЛЕВИХ БАГАТОШАРОВИХ БРОНЬОВАНИХ СТРУКТУР ЗА ДОПОМОГОЮ МЕТОДУ СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ

Д.С. Баулін<sup>1</sup>,канд. техн. наук, старший науковий співробітник<sup>1</sup>С.А. Манжура<sup>1</sup>,М.П. Одейчук<sup>2</sup>,канд. техн. наук, старший науковий співробітник<sup>2</sup>А.М. Одейчук<sup>2</sup>,канд. техн. наук, старший науковий співробітник<sup>2</sup>С.А. Горшлишев<sup>1</sup>,канд. техн. наук, доцент<sup>1</sup>М.І. Ільченко<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Національна академія Національної гвардії України, Харків, майдан захисників України 3, м. Харків, 61001

<sup>2</sup>Національний науковий центр "Харківський фізико-технічний інститут", Харків, вулиця Академічна, 1, м. Харків, 61008

DOI: 10.32347/2410-2547.2019.103.145-164

В той час, коли могутність сучасних засобів кінетичного ураження постійно зростає, традиційні металургійні і матеріалознавчі підходи до виробництва гомогенного (однорідного) листового прокату з броньових сталей вже не в змозі забезпечити високу динамічну стійкість без значного збільшення товщини броні і, відповідно, маси бронезахисної структури в цілому. Одним з напрямків вирішення цієї проблеми можливо за рахунок використання багатошарових металевих композитів. Об'єднання у композиті шарів високотвердої (але крихкої) і м'якої (але в'язкої) сталей забезпечує композитам таке поєднання твердості і в'язкості, яке неможливо досягти за традиційними методами виготовлення гомогенних броньових сталей (властивість емерджентності).

В даній роботі розглянуто процес взаємодії високошвидкісного вражаючого елементу з захисними багатошаровими броньованими перешкодами, які створені шляхом зварювання шарів композиту у твердій фазі (без розплавлення) за вакуумно-деформаційною методикою.

Досліджено механізм використання методу скінчених елементів для розрахунку бронестійкості захисних перешкод. Вибрані та обгрунтовані вихідні дані для імітаційного моделювання. Для моделювання фізичних явищ, що відбуваються у вражаючому елементі та перешкоді, таких як деформаційне і швидкісне зміцнення, температурне зменшення, руйнування і т.і., використовувались моделі поведінки матеріалів, які, в загальному випадку, складаються з трьох основних елементів: рівняння стану (equation of state), моделі пластичності (plasticity model) і моделі руйнування (damage model).

Отримані результати розрахунку бронестійкості двошарової бронепластины наступної структури: перший шар (фронтальний) – інструментальна вуглецева сталь з твердістю HRC 60 одиниць товщиною 6 мм, другий (тильний) – сталь з твердістю HRC 40 одиниць товщиною 4 мм при впливі удару високошвидкісного вражаючого елементу. Розглянуто вплив особливостей технології з'єднання шарів на поведінку швидкості центру мас і dna вражаючого елементу та розподілу еквівалентного напруження по Мізесу. Подальші дослідження пов'язані з отриманням залежності бронестійкості багатошарових бронепластин від їх загальної товщини та структури (складу та співвідношення шарів), що дозволить сформулювати рекомендації для вибору захисних структур.

**Ключові слова:** модель, бронестійкість, високошвидкісний вражаючий елемент, захисна багатошарова перешкода, зварювання у твердій фазі, деформація.

© Баулін Д.С., Манжура С.А., Одейчук М.П., Одейчук А.М., Горшлишев С.А., Ільченко М.І.

**Постановка проблеми.** Розробка ефективних засобів захисту є складною задачею, яка враховує велике число тактико-технічних вимог і чинників, що впливають на бойову ефективність, і які суперечать один одному. Відсутність на сьогоднішній день систематизованих рекомендацій щодо обґрунтування застосування матеріалів для виготовлення бронееlementів не дозволяють вирішувати цю проблему в повному обсязі.

Традиційні металургійні і матеріалознавчі підходи до виробництва гомогенного (однорідного) листового прокату з броньових сталей практично вичерпали свої можливості. В той час, коли могутність сучасних засобів кінетичного ураження постійно зростає, ці підходи вже не в змозі забезпечити високу динамічну стійкість без значного збільшення товщини броні і, відповідно, маси бронезахисної структури в цілому. Це твердження базується на тому факті, що за останні 20-30 років в світі не запропоновано жодного нового складу броньових сталей, принципово відмінного від вже відомих, внаслідок чого з'явилась би можливість виготовляти сталі зі значно вищими функціональними характеристиками порівняно з традиційними гомогенними бронесталлями. Крім того, створення броньових сталей досить витратне й вимагають фахівців високої кваліфікації.

Одним з напрямків вирішення цієї проблеми можливо за рахунок використання багатошарових металевих композитів. Об'єднання у композиті шарів високотвердої (але крихкої) і м'якої (але в'язкої) сталей забезпечує композитам таке поєднання твердості і в'язкості, яке неможливо досягти за традиційними методами виготовлення гомогенних броньових сталей (властивість емерджентності). Це надає таким композитам значно вищу балістичну стійкість у порівнянні з гомогенними сталлями.

Перспективним способом виробництва металевих композитів виявився метод виготовлення двошарового листового прокату за допомогою зварювання двох заготовок в процесі прокатки, вперше випробуваний в США [1]. У Національному науковому центрі "Харківський фізико-технічний інститут" створена оригінальна розробка зварюванням шарів композиту у твердій фазі (без розплавлення) за вакуумно-деформаційною методикою, яка не має світових аналогів.

Інтенсивні розробки броньованих структур для засобів захисту вимагають нових методів, що дозволять прогнозувати балістичні властивості матеріалів, встановлювати зв'язки між структурними фізико-хімічними та балістичними характеристиками, а також проводити докладне якісне порівняння матеріалів, чий балістичні характеристики досить близькі. На даний час існуючий науково-методичний апарат не дозволяє з достатньою ефективністю оцінювати параметри існуючих багатошарових бронееlementів. Тому удосконалення існуючих і розробка нових методів оцінювання бронестійкості багатошарових бронееlementів, які враховують особливості технологічних процесів виготовлення є актуальною і практично значущою науковою задачею. У зв'язку з цим на перший план висувається потреба в створенні надійних, досить універсальних і алгоритмічних простих для реалізації на сучасній комп'ютерній техніці методів розрахунку.

**Аналіз останніх досліджень і публікацій.** Єдиних методик, що дозволяють прогнозувати балістичні властивості матеріалів, на даний час не сформульовано, проте в іноземній і вітчизняній літературі представлений досвід окремих дослідників [2-4].

Дослідження [5-8] в області комбінованих бронематеріалів вказують на те, що їх найважливіші механічні властивості, такі як міцність при розтягуванні і стисненні, твердість і зносостійкість, залежать від характеристик мікроструктури. У роботах [9,10] розглядалися залежності характеристик бронеструктур з використанням кераміки на основі алюмінію від розміру та форми їх структурних складових. В цих дослідженнях розглядалися тільки статичні навантаження. Спираючись на встановлені залежності для статичних навантажень, дослідники намагалися виявити зв'язок між механічними і балістичними характеристиками матеріалів та прогнозувати їх зміни.

Однак в роботах [11-14] дослідники наполягають на тому, що реакція матеріалу на високошвидкісні ударні навантаження при балістичному впливі має інший механізм, ніж при статичних навантаженнях, і оцінити балістичні характеристики, оперуючи виключно даними про поведінку матеріалу при статичних навантаженнях, неможливо, особливо коли мова йде про порівняльну характеристику двох схожих за властивостями матеріалів.

У зв'язку із цим на перший план виходять методи імітаційного моделювання, які в сучасних умовах розвиваються дуже динамічно. Таким чином виникає задача вибору найбільш адекватної аналітичної моделі для опису високошвидкісного процесу зіткнення вражаючого елемента з перешкодами, особливо якщо перешкода має багат шарову структуру. Для цих моделей характерна багатовимірність, нелінійність і неоднозначність характеристик, що обумовлює їх наближеність і неповноту.

В опублікованих дослідженнях [15-17] було вивчено опір проникненню вражаючого елемента в пластину гомогенного типу алюмінієвого сплаву, і в більшості з них використовуються скінчено-елементні моделі, які складені з плоских (оболочечного типу) скінчених елементів. У роботі [17] наведено порівняння між конкретними гомогенними алюмінієвим і сталевим сплавами, а у [18] – порівняння між різними сплавами алюмінію.

У статті [18] для проведення розрахунків розроблена модель вражаючого елемента для програмного продукту LS-DYNA. Крім того, досліджувався вплив розмірів скінченого елемента в скінчено-елементній моделі для забезпечення отримання результатів з прийнятною точністю і мінімальним часом розв'язання.

У статті [19] детально досліджено процес нормального пробиття подовженими вражаючими елементами тонких і “напівнескінчених” однорідних пластин при низьких швидкостях удару. Розрахунки проведені за допомогою чисельного лагранжевого методу, модифікованого для розв'язання багатоконтактних динамічних задач механіки деформованого твердого тіла.

Велика увага приділялася і моделюванню багат шарових пакетів для перешкод. У роботах [20-22] розглянуті багат шарові пакети, які складаються з плоских пластин титану, алюмінію та кераміки змінної

товщини. Дослідження велися з урахуванням високошвидкісного впливу сталевого півсферичного вражаючого елемента на набір матеріалів. При такому впливі враховувалися зміна міцності матеріалу, наявність великих пластичних деформацій, нагрівання. При дослідженні враховувалися конструктивні особливості пластини, форму, геометрію і величину швидкості вражаючого елемента.

У роботі [23] запропонована 3-D методика моделювання процесів високошвидкісної взаємодії компактних вражаючих елементів з шаруватими перешкодами, які у своєму складі мають керамічні прокладки, при зіткненні по нормалі і під кутом до поверхні останніх.

Однак представлений огляд існуючих методів оцінки балістичних характеристик розглядає багат шарові перешкоди як окремі шари [20-22], які не з'єднані один з одним. Крім того, у процесі проектування елементів бронезахисту при виборі необхідних матеріалів і їх товщини виникають труднощі, які пов'язані з відсутністю інформації про внесок у загальний рівень стійкості комбінованої перешкоди кожного окремо взятого шару та особливостей їх з'єднання.

**Мета статті та завдання дослідження.** Метою цього дослідження є удосконалення методу розрахунку бронестійкості багат шарових броньованих структур, які створені шляхом зварювання шарів композиту у твердій фазі (без розплавлення) за вакуумно-деформаційною методикою, при впливі високошвидкісного вражаючого елемента.

Для досягнення мети були поставлені такі завдання:

- удосконалити метод розрахунку бронестійкості багат шарових броньованих структур, які створені шляхом зварювання шарів композиту у твердій фазі (без розплавлення) за вакуумно-деформаційною методикою;
- сформулювати вихідні дані для імітаційного моделювання;
- провести імітаційне моделювання бронестійкості багат шарових броньованих структур при впливі удару високошвидкісного вражаючого елемента.

**Основний матеріал. Використання методу скінченних елементів для моделювання процесу взаємодії вражаючого елемента і багат шарової перешкоди.** У даній статті розглядаються задачі імітаційного моделювання процесів високошвидкісного удару вражаючого елемента по багат шарової металевій перешкоді, шари якої мають однорідну структуру та створені шляхом зварювання шарів композиту у твердій фазі. Для визначення деформованого стану таких пластин вирішувалася динамічна контактна задача з граничними і початковими умовами. При розрахунку враховувалися зміни міцності матеріалу, наявність великих пластичних деформацій, нагрівання. При дослідженні враховувалися конструктивні особливості пластини, форма, геометрія, величина, швидкість і матеріал вражаючого елемента. В основу покладено метод скінченних елементів. Для цього використовувалося комп'ютерне проектування та моделювання образів досліджуваних об'єктів на базі обчислювальних логічних алгоритмів CAE-модуля ANSYS.

Рух суцільного середовища описується з використанням закону збереження маси, закону збереження імпульсу, закону збереження енергії. Математична модель руху суцільного середовища чисельно вирішується в ANSYS шляхом використання явного інтегрування за часом. Малий час збільшення використовується для забезпечення стабільності і точності розв'язання.

Для лагранжевих формулювань в системі ANSYS щільність в будь-який момент може бути визначена з поточного об'єму зони і її початкової маси [20-22]

$$\frac{\rho_0 V_0}{V} = \frac{m}{V}. \quad (1)$$

Рівняння в частинних похідних, які виражають закон збереження імпульсу, пов'язують прискорення і тензор напружень  $\sigma_{ij}$ :

$$\begin{aligned} \rho \ddot{x} &= b_x + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z}; \\ \rho \ddot{y} &= b_y + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z}; \\ \rho \ddot{z} &= b_z + \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z}. \end{aligned} \quad (2)$$

Закон збереження енергії виражається наступним чином:

$$\dot{e} = \frac{1}{\rho} \left( \sigma_{xx} \dot{\epsilon}_{xx} + \sigma_{yy} \dot{\epsilon}_{yy} + \sigma_{zz} \dot{\epsilon}_{zz} + 2\sigma_{xy} \dot{\epsilon}_{xy} + 2\sigma_{yz} \dot{\epsilon}_{yz} + 2\sigma_{zx} \dot{\epsilon}_{zx} \right). \quad (3)$$

Ці рівняння вирішуються в явному вигляді для кожного елемента в моделі, заснованої на вхідних значеннях в кінці попереднього кроку за часом. При інтегруванні застосовують метод центральних різниць. Прискорення оцінюються для  $t$ :

$$\{a_t\} = [M]^{-1} \left( [F_t^{\text{ext}}] - [F_t^{\text{int}}] \right), \quad (4)$$

де  $\{a_t\}$  – вектор прискорення;  $[M]$  – матриця мас;  $[F_t^{\text{ext}}]$  – вектор прикладених зовнішніх сил;  $[F_t^{\text{int}}]$  – вектор внутрішніх сил.

Вектор внутрішніх сил розраховується за формулою

$$F^{\text{int}} = \sum \left( \int_{\Omega} B^T \sigma_n d\Omega + F^{\text{hg}} \right) + F^{\text{contact}}, \quad (5)$$

де  $F^{\text{hg}}$  – сила hourglass-опору;  $F^{\text{contact}}$  – сила контакту;

$$\sigma_n = \begin{cases} \sigma_i \\ \sigma_i + \sigma_{zl} \end{cases},$$

де  $\sigma_n$  – межа міцності матеріалу,  $i$  – номер шару;  $\sigma_{zl} = \sigma_z + \sigma_{zs}$  – межа міцності для елементів на кордоні з'єднання шарів, яка враховує особливості технології зварювання у твердій фазі (без розплавлення) за

вакуумно-деформаційною методикою та складається з міцності між шарами  $\sigma_z$  та межі міцності зсуву  $\sigma_{zs}$ .

Потім обчислюються швидкості і переміщення:

$$\begin{aligned} \{v_{t+\Delta t/2}\} &= \{v_{t-\Delta t/2}\} + \{a_t\}\Delta t; \\ \{u_{t+\Delta t}\} &= \{u_t\} + \{v_{t+\Delta t/2}\} + \{a_t\}\Delta t_{t+\Delta t/2}; \\ \Delta t_{t+\Delta t/2} &= 0.5(\Delta t_t + \Delta t_{t+\Delta t}); \\ \Delta t_{t-\Delta t/2} &= 0.5(\Delta t_t - \Delta t_{t+\Delta t}). \end{aligned} \quad (6)$$

Геометрія оновлюється додаванням збільшень переміщень до вихідної геометрії  $\{x_0\}$ :

$$\{x_{t+\Delta t}\} = \{x_0\} + \{u_{t+\Delta t}\}. \quad (7)$$

Для спрощення обернення матриць потрібно діагональна матриця мас. Виходячи з того, що рівняння стають непов'язаними, то в програмному пакеті ANSYS вони вирішуються явно. Обернення матриці жорсткості не потрібно. Всі нелінійності (включаючи контакт) враховуються в векторі внутрішніх сил.

Для моделювання фізичних явищ, що відбуваються у вражаючому елементі та перешкоді, таких як деформаційне і швидкісне зміцнення, температурне зміцнення, руйнування і т.і., необхідно використовувати моделі поведінки матеріалів, які, в загальному випадку, складаються з трьох основних елементів: рівняння стану (equation of state), моделі пластичності (plasticity model) і моделі руйнування (damage model).

Рівняння стану описує залежність напружень від деформації і внутрішньої енергії (температури). Воно може бути задано виходячи з даних про термодинамічні властивості матеріалу. У більшості випадків рівняння стану для розрахунків формується на підставі експериментальних даних, що є лінійною апроксимацією реального рівняння стану на основі ретельно проведених експериментів і являє собою многочлен з деякою кількістю емпіричних констант.

У випадку малостисливих матеріалів, якими є сталі різних марок, рівняння стану задається співвідношенням:

$$p = K\mu, \quad (8)$$

де  $p$  – тиск;  $K$  – модуль об'ємної пружності;  $\mu$  – ступінь стиску середовища.

$$K = \frac{E}{3(1-2\nu)}; \quad \mu = \frac{\rho}{\rho_0} - 1,$$

де  $E$  – модуль пружності;  $\nu$  – коефіцієнт Пуассона;  $\rho$  і  $\rho_0$  – поточне й початкове значення щільності матеріалу.

Співвідношення (8) справедливо для пружної деформації при невеликих об'ємних деформаціях, після якої настає стадія пластичної деформації. На цей час для моделювання та дослідження пластичної деформації, що спостерігається при високошвидкісних процесах зіткнення вражаючого елемента з перешкодою найбільше поширення отримали

моделі Купера-Саймондса (Cowper-Symonds) [24], Джонсона-Кука (Johnson-Cook) [25] і Зеріллі-Армстронга (Zerilli-Armstrong) [26]. Ці моделі мають порівняно невелику кількість констант, що характеризують матеріал, і реалізовані в сучасних пакетах чисельного аналізу. У [27] проведено аналіз недоліків та переваг цих моделей та обґрунтовано вибір моделі Джонсона-Кука для імітаційного моделювання.

Модель Джонсона-Кука [25] дозволяє описувати динамічну межу плинності металів, що піддаються великим деформаціям, високим швидкостям деформації і високим температурам:

$$\sigma = \left( A + B\varepsilon^n \right) \left( 1 + C \ln \dot{\varepsilon}^* \right) \left( 1 - T_c^{*m} \right), \quad (9)$$

де  $\varepsilon$  – пластична деформація;  $\dot{\varepsilon}^* = \dot{\varepsilon}/\dot{\varepsilon}_0$  – безрозмірна швидкість пластичної деформації, що визначається як відношення миттєвої швидкості пластичної деформації  $\dot{\varepsilon}$  до її граничного значення  $\dot{\varepsilon}_0$  [с<sup>-1</sup>];  $T_c^*$  – гомологічна температура;  $A$  – статична межа плинності;  $B$  – модуль деформаційного зміцнення;  $n$  – показник ступеня в законі деформаційного зміцнення;  $C$  – коефіцієнт швидкості деформацій;  $m$  – показник ступеня в законі температурного зменшення.

Крім того, модель Джонсона-Кука передбачає незалежність відносного впливу деформаційного зміцнення, швидкості пластичної деформації і підвищення температури при всіх швидкостях і температурах пластичної деформації.

В якості критерію руйнування була обрана модель Джонсона-Кука на базі кумулятивного закону накопичення пошкодженості.

**Формування вихідних даних для моделювання.** Для імітаційного моделювання процесу взаємодії вражаючого елемента з перешкодою використовувалася загальна модель кулі з номінальною масою 10 г. та початковою швидкістю  $V_2 = 820$  м/с.

Зовнішній вигляд вражаючого елемента [28] та її трьохмірна модель після моделювання за допомогою спеціалізованої програмної системи ANSYS наведені на рис. 1. Зовнішня оболонка вражаючого елемента (рис. 1(б)) є сталь, плакована томпаком. Матеріал осереддя – інструментальна вуглецева сталь з твердістю HRC не нижче 60 одиниць.

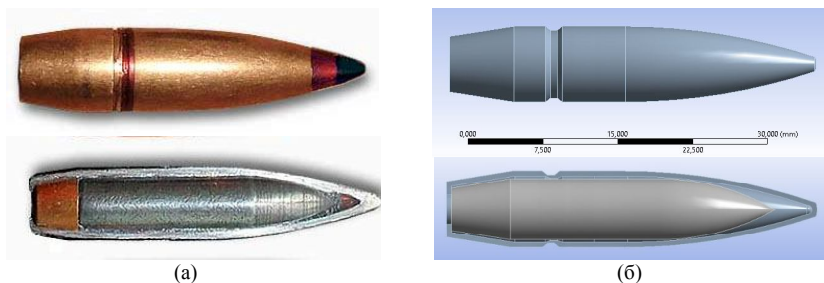


Рис. 1. Зовнішній вигляд вражаючого елемента: (а) фотографія (б) тривимірна модель

Для моделювання поверхонь вражаючого елемента використовувалися

тетраедральні ізопараметричні елементи. На рис. 2 наведена сітка розбиття на скінчені елементи поверхонь вражаючого елемента. Характеристики сітки наступні: оболонка вражаючого елемента (томпак) – 1064 вузла та 680 елементів; осереддя вражаючого елемента (сталь з твердістю HRC не нижче 60 одиниць) – 459 вузлів та 360 елементів; осереддя та заглушка (свинець) – 1058 вузлів та 847 елементів.

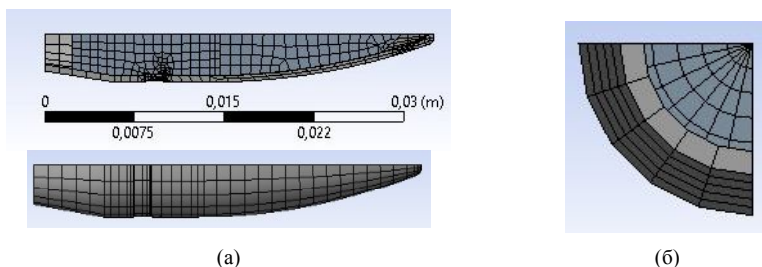


Рис. 2. Сітка скінчених елементів для вражаючого елемента:  
(а) вид з ліва; (б) вид з заду

Наступним етапом є моделювання перешкоди. Перешкодою є пластина з шаруватого металевго композиту довільної товщини (у даному дослідженні 10 мм). У даній роботі розглядається двшарова структура, але розроблений підхід дозволяє досліджувати і більш складні структури. Фронтальний шар є металом з твердістю HRC не менше 60 одиниць. Тильний шар є також металевим (гомогенний матеріал), але більш пластичний та має твердість HRC до 40 одиниць.

З'єднання шарів композиту між собою здійснюють їх зварюванням у твердій фазі (без розплавлення) за вакуумно-деформаційною методикою, що вносить додаткові корективи в структуру композиту і впливає на властивості композита протистояти удару вражаючого елемента та моделювалося в ANSYS за допомогою додавання до існуючої моделі зв'язку між шарами, який характеризувався наступними величинами:  $\sigma_z$  межа міцності між шарами, що дорівнює  $10^3$  МПа та  $\sigma_{zs}$  межа міцності зсуву –  $8,2 \cdot 10^4$  МПа.

Для моделювання поверхонь шарів перешкоди також використовувалися тетраедральні ізопараметричні елементи. На рис. 3 наведена сітка скінчених елементів для багатошарової перешкоди.

Сітка скінчених елементів пластини має згущення в області зіткнення. Характерний розмір елемента в площині пластини є 0,33 мм. Кількість шарів елементів сітки залежить як від заданої товщини перешкоди взагалі, так і від кількості та товщини кожного шару. Наприклад, двшарова структура буде мати двадцять шарів елементів по товщині. Розмір елементів збільшується в міру віддалення від зони зіткнення. Характеристики сітки перешкоди – 61504 вузла та 55815 елементів.

Вражаючий елемент стикається з багатошарової перешкодою перпендикулярно до осі перетину перешкоди зі швидкістю  $V = 820$  м/с. Перешкодою є двшарова бронепластина наступної структури: перший



шар (фронтальний) – інструментальна вуглецева сталь з твердістю HRC не менше 60 одиниць товщиною 6 мм, другий (тильний) – сталь з твердістю HRC до 40 одиниць товщиною 4 мм. Схема їх взаємодії наведена на рис. 4.

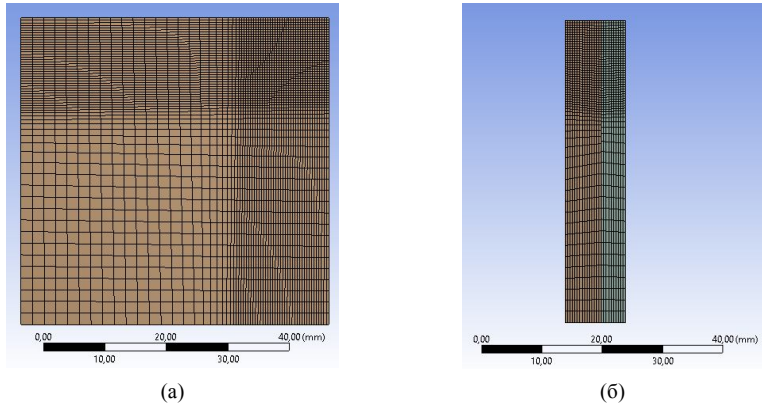


Рис. 3. Сітка скінченних елементів для багатошарової перешкоди:  
(а) вид з переду; (б) вид з ліва

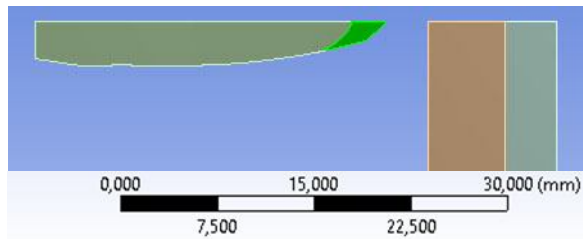


Рис. 4. Схема взаємодії вражаючого елемента з перешкодою

Враховуючи те, що взаємодія вражаючого елемента та перешкоди згідно зі схемою (рис. 4) в початковий момент часу відбувається під кутом  $90^0$  в двох площинах одночасно, модель побудована для однієї чверті перешкоди та вражаючого елемента. При цьому були задані відповідні обмеження, які вказують на симетричність розв'язуваної задачі в двох площинах. Вражаючий елемент при цьому було розташовано на початку моделювання впритул з перешкодою в точці очікуваної взаємодії. Час моделювання від початку зіткнення вражаючого елемента з перешкодою дорівнював  $10^{-4}$  с.

**Результати моделювання напружено-деформованого стану багатошарових броньованих структур при впливі удару вражаючого елемента.** Результати скінчено-елементного моделювання з використанням моделі Джонсона-Кука показали наступне. При зіткненні вражаючого елемента з багатошаровою перешкодою починається процес деформування як самого вражаючого елемента, так і пластини.

Часова динаміка розвитку процесу взаємодії вражаючого елемента з перешкодою наведена на рис. 5. Тривалість  $T$  зазначена для кожного

кадру в мікросекундах – це інтервал часу від моменту стикання вражаючого елемента з перешкодою ( $T = 0$  с) до комп'ютерної фіксації певного етапу пробиття.

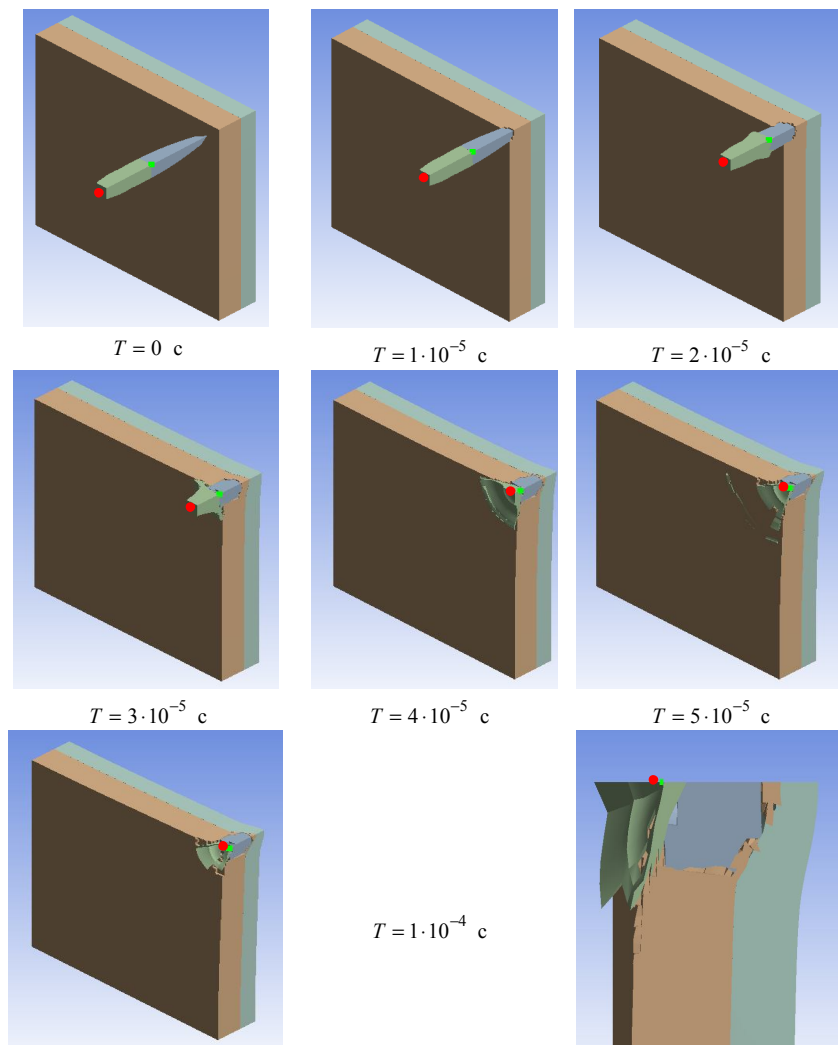


Рис. 5. Часова динаміка пробиття перешкоди вражаючим елементом

При зіткненні вражаючого елемента з перешкодою в момент торкання починається процес деформування першого шару пластини і наростання у всіх компонентах напруження та деформацій. Процес пробиття першого шару перешкоди триває до 30-ї мкс. Протягом цього часу відбувається деформація вражаючого елемента і падіння його швидкості (в точці центру мас) до 85%. Залежність швидкості центру мас (місце центру мас показано зеленим квадратом на рис. 5) вражаючого елемента приведена на рис. 6.

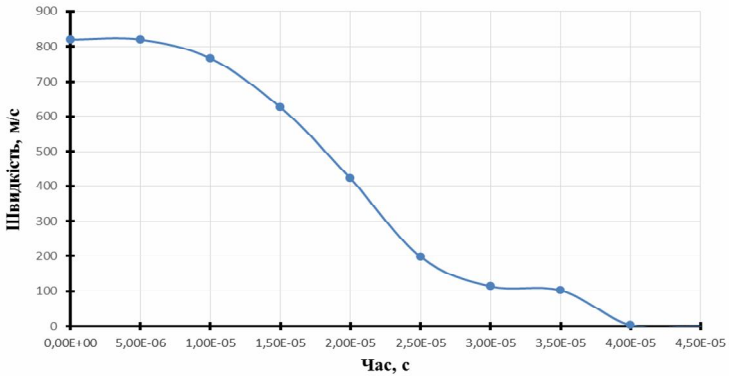


Рис. 6. Залежність швидкості центру мас вражаючого елемента від часу

На рис. 7 наведено залежність швидкості центра дна вражаючого елемента (місце центра дна вражаючого елемента показано на рис. 5 червоним колом) від часу. З даного графіка видно, що падіння швидкості даної точки вражаючого елемента до 30-ї мкс на відміну від швидкості точки мас відбувається незначне, до 740 м/с. Це пояснюється тим, що відбувається деформація вражаючого елемента, і точка дна, практично зберігаючи свою швидкість, зближується з центром мас вражаючого елемента. Далі відбувається взаємодія даної точки з перешкодою і швидкість починає різко знижуватися до нуля.

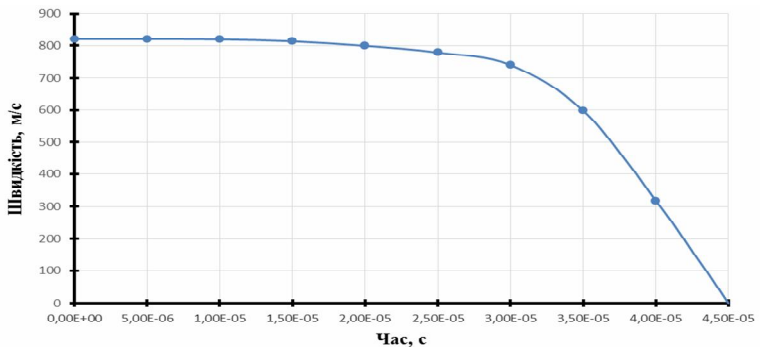


Рис. 7. Залежність швидкості центра дна вражаючого елемента від часу

Зона пробиття і виплеску матеріалу набуває форму кола. З 30-ї до 40-ї мкс відбувається проникнення в другий шар. Далі до 70 мкс спостерігається процес розриву зв'язків між шарами в області удару, прогинання пластини до 0,56 мм і формування вигину на тильній стороні величиною 1,98 мм, деформація вражаючого елемента і повна його зупинка.

Розглянемо цей процес з точки зору деформацій і напружень вражаючого елемента і перешкоди (рис. 8).

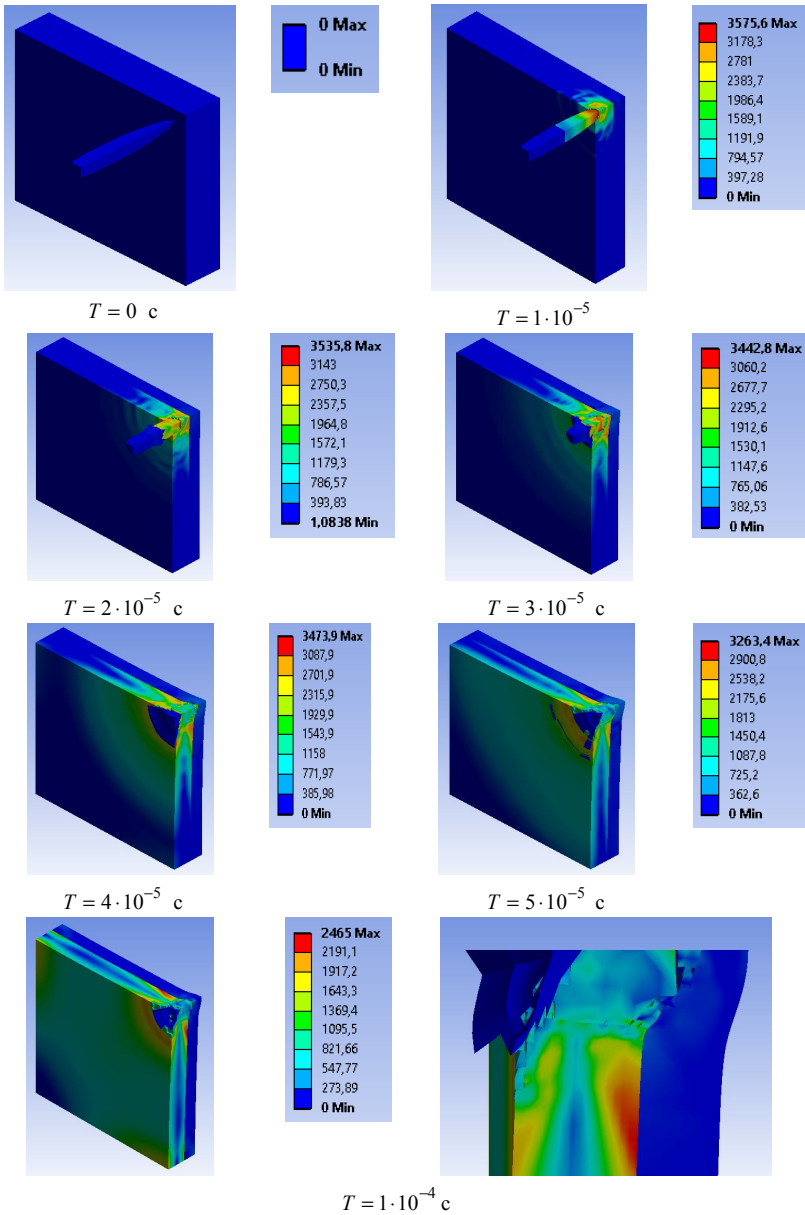


Рис. 8. Часова динаміка розподілу еквівалентного напруження по Мізесу при пробитті перешкоди вражаючим елементом

З плином часу взаємодії вражаючого елемента з перешкодою спостерігається наростання у всіх компонентах напруження та деформації. Значення ефективно пластичної деформації вражаючого елемента з перешкодою змінюється нерівномірно.

У початковий момент часу до 10 мкс зона максимальних значень пластичних деформацій зосереджена в точці зіткнення вражаючого елемента та перешкоди. Причому основний вплив припадає на вражаючий елемент, який зазнає значної деформації.

Поступово починається руйнування першого шару перешкоди починаючи з 5-ої мкс. До 30-ої мкс спостерігається наростання напруження в першому шарі з проникненням вражаючого елемента до межі вакуумно-деформаційного з'єднання. Зона ефективних пластичних деформацій, близьких до граничного значення, набуває форму кільця на межі зони виплеску матеріалу на лицьовій частині перешкоди. Починаючи з 40-ої мкс перший твердий шар перешкоди пробитий і вражаючий елемент починає взаємодію з другим в'язким шаром.

Протягом наступних 25-ти мкс відбувається деформування другого шару, проте величина пластичної деформації досягає лише 30% своєї максимальної величини. У першому шарі ефективні пластичні деформації поширюються по всій пластині, причому при видаленні від точки зіткнення величина напруження і деформації зменшується практично за лінійним законом.

При аналізі напруження всередині перешкоди, після зупинення вражаючого елемента, максимум напруження зосереджено на межі з'єднання двох шарів, що в деяких випадках призводить до механічного розриву з'єднання шарів.

Таким чином, вихідні дані математичного моделювання напружено-деформованого стану багатошарових броньованих структур при впливі удару вражаючого елемента дозволять отримати багато корисної інформації, яка дозволяє в подальшому проводити аналіз процесу зіткнення вражаючого елемента і багатошарової перешкоди та сформулювати обґрунтовані висновки та практичні рекомендації.

### **Висновки**

1. У результаті дослідження удосконалено метод розрахунку бронестійкості багатошарових броньованих структур, які створені шляхом зварювання шарів композиту у твердій фазі (без розплавлення) за вакуумно-деформаційною методикою за допомогою методу скінченних елементів.

Для моделювання фізичних явищ, що відбуваються у вражаючому елементі та перешкоді, таких як деформаційне і швидкісне зміцнення, температурне знеміцнення, руйнування і т.і. використовувалися моделі трьох основних елементів: рівняння стану, модель пластичності (моделі Джонсона-Кука) і моделі руйнування (сполучена модель Джонсона-Кука на базі кумулятивного закону накопичення пошкодженості).

З'єднання шарів композиту між собою моделювалося за допомогою додавання до існуючої моделі зв'язку між шарами, який характеризувався межею напруженості та межею напруги зсуву.

2. Вибрані та обґрунтовані вихідні дані для імітаційного моделювання. Для моделювання поверхонь вражаючого елемента та перешкоди використовувалися тетрадральні ізопараметричні елементи. Кількість елементів сітки розбиття на скінченні елементи вражаючого елемента та перешкоди обрані таким чином, що забезпечується збіжність результатів

розрахунку. Крім того, малий час збільшення при моделюванні забезпечує стабільність і точність розв'язання. При моделюванні контролюється виконання закону збереження маси, імпульсу та енергії системи “вражаючий елемент – перешкода”.

3. Отримані результати імітаційного моделювання бронестійкості двохшарової бронепластики наступної структури: перший шар (фронтальний) – інструментальна вуглецева сталь з твердістю HRC не нижче 60 одиниць товщиною 6 мм, другий (тильний) – сталь з твердістю HRC 40 одиниць товщиною 4 мм при впливі удару високошвидкісного вражаючого елемента. Розглянуто вплив особливостей технології з'єднання шарів на поведінку швидкості центру мас і дна вражаючого елемента та розподілу еквівалентного напруження по Мізесу.

#### СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Ogorkiewicz, R. M.* Advances in armour materials. International Defence Review. – 1991. – № 4. – P. 349-352.
2. *Анастасиади, Г.П.* Работоспособность броневых материалов [Текст] / Г.П. Анастасиади, М.В. Сильников / НПО “Специальные материалы”. – СТО., 2004. – 622 с.
3. Основные направления развития средств индивидуальной бронезащиты : материалы международной научно-практич. конф. [“Спецсредства индивидуальной бронезащиты”], (Москва, 24 апреля 2013 г.) – М. : ВВЦ, 2013. – 133 с.
4. Microhardness and High-Velocity Impact Resistance of SiC and ZrB<sub>2</sub>/SiC Composites / J. Marschall, D C. Erlich, H. Manning, W. Duppler, D. Ellerby, M. Gasch // J. Mater. Sci. – 2004. – № 39. – P. 5959-5968.
5. *Игнатова, А.М.* Аналитический обзор современных и перспективных материалов и конструкций бронепреград и защит от поражения [Текст] / А.М. Игнатова., А.О. Артемов // Фундаментальные исследования. – 2012. – № 6-1. – С. 101-105.
6. *Игнатов, М.Н.* Исследование взаимосвязи акустической эмиссии и разрушения камнелитых материалов в условиях одноосного сжатия [Текст] / М.Н. Игнатов, А.М. Игнатова, А.О. Артемов, В.А. Асанов // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: Технические науки. – 2011. – № 2. – С. 126-132.
7. *Игнатова, А.М.* Методика исследования диссипативных свойств синтетических минеральных сплавов при высокоскоростном пробивании [Текст] / А.М. Игнатова, А.О. Артемов, М.Н. Игнатов, М.А. Сокоиков // Фундаментальные исследования. – 2012. – № 9-1. – С. 145-150.
8. *Игнатова, А.М.* Исследование диссипативных свойств синтетических минеральных сплавов для создания на их основе броневой защиты [Текст] / А.М. Игнатова, А.О. Артемов, В.В. Чудинов, М.Н. Игнатов, М.А. Сокоиков // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: Технические науки. – 2012. – № 3. – С. 105-112.
9. Новые тенденции в области средств индивидуальной защиты пехотинца [Электронный ресурс] – Режим доступа: [http://www.defens-update.com/features/du-2-07/infantry\\_armor\\_cooling.htm](http://www.defens-update.com/features/du-2-07/infantry_armor_cooling.htm). – Загол. з екрану.
10. *Чернышов, Е.А.* Создание металлокерамических элементов баллистической защиты с применением керамики на основе алюминия [Текст] / Е.А. Чернышов, В.В. Мильников, М.В. Мильникова, А.Д. Романов, Е.А. Романова // Современные наукоёмкие технологии. – 2014. – №4. – С. 97-101.
11. *Смирнов, В.П.* Оценка эффективности защиты армейских средств индивидуальной бронезащиты [Текст] / В.П. Смирнов // Техника и вооружение. – № 7. – 2013.
12. *Игнатова, А.М.* Противокумулятивная защита техники с применением синтетических минеральных сплавов [Текст] / А.М. Игнатова, А.О. Артемов, М.Н. Игнатов // Двойные технологии. – 2014. – № 2 (67). – С. 13-17.
13. Легкие баллистические материалы. Под ред. А. Бхатнагара. – М.: Изд. “ЗАО “РИЦ Техносфера”, 2011. – 392 с.
14. *Авершьева, А.С.* Обобщенный алгоритм расчета конструкций на высокоскоростной удар [Текст] / А.С. Авершьева, А.А. Локтев // Вестник Московского Национального исследовательского государственного строительного университета. – 2012. – № 7. – С. 51-

- 59.
15. *Borvik T., Olovsson L., Dey S., Langseth M.* Normal and oblique impact of small arms bullets on AA6082-T4 aluminium protective plates // Intern. J. of Impact Engineering. 2011. Vol. 38. Iss. 7. Pp. 577-589. DOI: 10.1016/j.ijimpeng.2011.02.001.
  16. *Jorgensen K.C., Swan V.* Modeling of armour-piercing projectile perforation of thick aluminium plates // 13th Intern. LS-DYNA Users Conf. 2014 (Dearborn, Michigan, USA, June 8-10 2014): Conf. papers. Livermore: LSTC, 2014. – 15 p.
  17. *Liu Z.S., Swaddiwudhipong S., Islam M.J.* Perforation of steel and aluminum targets using a modified Johnson–Cook material model // Nuclear Engineering and Design. 2012. Vol. 250. Pp. 108-115. DOI: 10.1016/j.nucengdes.2012.06.026.
  18. *Шаш В.Н.* Численное моделирование проникания пуль стрелкового оружия в пластины из алюминиевых сплавов с использованием модифицированной модели Джонсона–Кука / Шаш Н.И., Зувов В.Н. // Наука и Образование. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электрон. журн. 2017. № 01. С. 1–19. DOI: 10.7463/0117.0000922.
  19. *Глазырин, В.П.* Расчет процесса пробития ударниками с различной формой головных частей однородных преград [Текст] / В.П. Глазырин, М.Ю. Орлов, Ю.Н. Орлов, Г.Н. Богомолов // Вестник бурятского государственного университета, 2011 – №9 – С.245-248.
  20. *Добротворский, С.С.* Исследование степени деформации многослойных пакетов при ударном нагружении полусферическим ударником с применением САЕ систем [Текст] / С.С. Добротворский, С.С. Гнучих Л.Г. Добровольская // Открытые информационные и компьютерные интегрированные технологии № 69, Национальный технический университет “ХПИ”, Харьков, 2015 – С. 200-205.
  21. *Добротворский, С.С.* Исследование степени деформации двухслойных титаноалюминиевых пакетов при ударном нагружении стальным инструментом с применением САЕ систем [Текст] / С.С. Добротворский, С.С.Гнучих, Л.Г. Добровольская // Вісник НТУ “ХПІ”, 2015. – №4 (1113) – С. 166-169.
  22. *Добротворский, С.С.* Моделирование процесса ударного деформирования пластин полусферическим ударником [Текст] / С.С. Добротворский, С.С.Гнучих, Л.Г. Добровольская // Вісник НТУ “ХПІ”. 2015. – №40(1149) Технології в машинобудуванні – С. 39-42.
  23. *Герасимов, А.В.* Численное моделирование пробития слоистых преград [Текст] / А.В. Герасимов, С.В. Пашков // Механика композиционных материалов и конструкций – том 19, №1, 2013 – С. 49-62.
  24. *Cowper, G.R.* Strain hardening and strain rate effects in the impact loading of cantilever beams / G. R. Cowper, P. S. Symonds // Brown Univ., Div. of Appl. Mech. – 1952. - Report № 28. – 46 p.
  25. *Johnson, G.R.* A constitutive model and data for metals subjected to large strains, high strain rates and high temperatures / G. R. Johnson, W. H. Cook // Proceedings of the 7-th International Symposium on Ballistics. – The Hague, The Netherlands. – 1983. – P. 541-547.
  26. *Zerilli, E.J.* Dislocation mechanics based constitutive relations for material dynamics calculations / E. J. Zerilli, R. W. Armstrong // J. Appl. Phys. – 1987. – № 61(5). – P. 1816-1825.
  27. *Баулін Д.С.* Математична модель високошвидкісної взаємодії вражаючого елемента та багатопарової перешкоди / Д.С. Баулін, С.А. Горелишев, С.А. Манжура // матеріали VIII науково-практ. конференції, секція 2, Харків, 29 березня 2018р.: тези доповідей. – Х.: Національна академія Національної гвардії України, 2017. – С.117-119.
  28. *Патроны к стрелковому оружию. (Справочное пособие) / [Коломыйцев А.В., Собакарь И.С., Никитюк В.Г., Сомов В.В.]* – Х.: НИИ судебных экспертиз им. Н.С. Бокариуса, 2003. – 336 с.

## REFERENCES

1. *Ogorkiewicz, R. M.* Advances in armour materials. International Defence Review. – 1991. – № 4. – P. 349-352.
2. *Anastasiadi, G.P.* Rabotosposobnost' bronevykh materialov (Efficiency of armor materials) / G.P. Anastasiadi, M.V. Sil'nikov / NPO “Spetsial'nyye materialy”. – СТО., 2004. – 622 s.
3. *Osnovnyye napravleniya razvitiya sredstv individual'noy bronzeshchity (The main directions of development of personal protective equipment) : materialy mezhdunarodnoy nauchno-praktich. konf. [“Spets sredstva individual'noy bronzeshchity”], (Moskva, 24 aprelya 2013 g.,) – М. : VVTS, 2013. – 133 s.*
4. *Microhardness and High-Velocity Impact Resistance of SiC and ZrB<sub>2</sub>/SiC Composites / J. Marshall, D C. Erlich, H. Manning, W. Duppler, D. Ellerby, M. Gasch // J. Muter. Sci. – 2004. – №. 39. – R. 5959-5968.*
5. *Ignatova, A.M.* Analiticheskiy obzor sovremennykh i perspektivnykh materialov i konstruksiy

- bronepregrad i zashchit ot porazheniya (Analytical review of modern and promising materials and designs of armored obstacles and defenses against destruction) / A.M. Ignatova, A.O. Artemov // Fundamental'nyye issledovaniya. – 2012. – № 6-1. – S. 101-105.
6. *Ignatov, M.N.* Issledovaniye vzaimosvyazi akusticheskoy emissii i razrusheniya kamnelitykh materialov v usloviyakh odnoosnogo szhatiya (Investigation of the relationship of acoustic emission and destruction of kamnelite materials under uniaxial compression) / M.N. Ignatov, A.M. Ignatova, A.O. Artemov, V.A. Asanov // Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta. Seriya: Tekhnicheskiye nauki. – 2011. – № 2. – S. 126-132.
  7. *Ignatova, A.M.* Metodika issledovaniya dissipativnykh svoystv sinteticheskikh mineral'nykh splavov pri vysokoskorostnom probivani (Research methods for dissipative properties of synthetic mineral alloys during high-speed punching) / A.M. Ignatova, A.O. Artemov, M.N. Ignatov, M.A. Sokovikov // Fundamental'nyye issledovaniya. – 2012. – № 9-1. – S. 145-150.
  8. *Ignatova, A.M.* Issledovaniye dissipativnykh svoystv sinteticheskikh mineral'nykh splavov dlya sozdaniya na ikh osnove bronevoy zashchity (Investigation of dissipative properties of synthetic mineral alloys to create armor protection on their basis) / A.M. Ignatova, A.O. Artemov, V.V. Chudinov, M.N. Ignatov, M.A. Sokovikov // Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta. Seriya: Tekhnicheskiye nauki. – 2012. – № 3. – S. 105-112.
  9. Novyye tendentsii v oblasti sredstv individual'noy zashchity pekhotintsa (New trends in infantry personal protective equipment) [Yelektronniy resurs] – Rezhim dostupu: [http://www.defens-update.com/features/du-2-07/infantry\\_armor\\_cooling.htm](http://www.defens-update.com/features/du-2-07/infantry_armor_cooling.htm). – Zagol. z yekranu.
  10. *Chernyshov, Ye.A.* Sozdaniye metallokeramicheskikh elementov ballisticheskoy zashchity s primeneniym keramiki na osnove alyuminiya (Creation of metal-ceramic elements of ballistic protection using aluminum-based ceramics) / Ye.A. Chernyshov, V.V. Myl'nikov, M.V. Myl'nikova, A.D. Romanov, Ye.A. Romanova // Sovremennyye naukoymkiye tekhnologii. – 2014. – №4. – S. 97-101.
  11. *Smirnov, V.P.* Otsenka effektivnosti zashchity armeyskikh sredstv individual'noy bronzashchity (Evaluation of the effectiveness of the protection of the army means of individual armor) / V.P. Smirnov // Tekhnika i vooruzheniye. – № 7. – 2013.
  12. *Ignatova, A.M.* Protivokumulyativnaya zashchita tekhniki s primeneniym sinteticheskikh mineral'nykh splavov (Anti-cumulative protection of equipment using synthetic mineral alloys) / A.M. Ignatova, A.O. Artemov, M.N. Ignatov // Dvoynyye tekhnologii. – 2014. – № 2 (67). – S. 13-17.
  13. Legkiye ballisticheskkiye materialy (Lightweight ballistic materials). Pod red. A. Bkhatnagara. – M.: Izd. "ZAO "RITS Tekhnosfera", 2011. – 392 s.
  14. *Aversh'yev, A.S.* Obobshchenny algoritm rascheta konstruktsey na vysokoskorostnoy udar (Generalized algorithm for calculating structures for high-speed impact) / A.S. Aversh'yev, A.A. Loktev // Vestnik Moskovskogo Natsional'nogo issledovatel'skogo gosudarstvennogo stroitel'nogo universiteta. – 2012. – № 7. – S. 51-59.
  15. *Borvik T., Olovsson L., Dey S., Langseth M.* Normal and oblique impact of small arms bullets on AA6082-T4 aluminium protective plates // Intern. J. of Impact Engineering. 2011. Vol. 38. Iss. 7. Pp. 577-589. DOI: 10.1016/j.ijimpeng.2011.02.001.
  16. *Jorgensen K.C., Swan V.* Modeling of armour-piercing projectile perforation of thick aluminium plates // 13th Intern. LS-DYNA Users Conf. 2014 (Dearborn, Michigan, USA, June 8-10 2014): Conf. papers. Livermore: LSTC, 2014. – 15 p.
  17. *Liu Z.S., Swaddiwudhipong S., Islam M.J.* Perforation of steel and aluminum targets using a modified Johnson-Cook material model // Nuclear Engineering and Design. 2012. Vol. 250. Pp. 108-115. DOI: 10.1016/j.nucengdes.2012.06.026.
  18. *Shash V.N.* Chislennoye modelirovaniye pronikaniya pul' strelkovogo oruzhiya v plastiny iz alyuminiyevykh splavov s ispol'zovaniyem modifitsirovannoy modeli Dzhonsona-Kuka (Numerical simulation of the penetration of small arms bullets into plates of aluminum alloys using a modified Johnson-Cook model) / Shash N.Í., Zuzov V.N. // Nauka i Obrazovaniye. MGТУ im. N.E. Baumana. Elektron. zhurn. 2017. № 01. S. 1-19. DOI: 10.7463/0117.0000922.
  19. *Glazyrin, V.P.* Raschet protsessy probitiya udarnikami s razlichnoy formoy golovnykh chastey odnorodnykh pregrad (The calculation of the process of penetration by the impactors with different shapes of the head parts of homogeneous obstacles) / V.P. Glazyrin, M.YU. Orlov, YU.N. Orlov, G.N. Bogomolov // Vestnik buryatskogo gosudarstvennogo universiteta, 2011 – №9 – S.245-248.
  20. *Dobrovorskiy, S.S.* Issledovaniye stepeni deformatsii mnogoslownykh paketov pri udarnom nagruzhenii polusfericheskim udarnikom s primeneniym CAE sistem (Investigation of the degree of deformation of multilayer packages under shock loading by a hemispherical drummer using CAE systems) / S.S. Dobrovorskiy, S.S. Gnuchikh L.G. Dobrovolskaya // Otkrytyye informatsionnyye i komp'yuternyye integrirovannyye tekhnologii № 69, Natsional'nyy



- tehnicheskiiy universitet "KHPI", Khar'kov, 2015 – С. 200-205.
21. *Dobrovorskiy, S.S.* Issledovaniye stepeni deformatsii dvukhsloynnykh titanovoaluminiumyevykh paketov pri udarnom nagruzhenii stal'nym instrumentom s primeneniym CAE sistem (Investigation of the degree of deformation of two-layer titanium-aluminum packages under shock loading with steel tools using CAE systems) / S.S. Dobrovorskiy, S.S.Gnuchikh, L.G. Dobrovol'skaya // *Visnik NTU "KHPI"*. 2015. – №4 (1113) – С. 166-169.
  22. *Dobrovorskiy, S.S.* Modelirovaniye protsessa udarnogo deformirovaniya plastin polusfericheskim udarnikom (Modeling the process of striking a plate by a hemispherical drummer) / S.S. Dobrovorskiy, S.S.Gnuchikh, L.G. Dobrovol'skaya // *Visnik NTU "KHPI"*. 2015. – №40(1149) *Tekhnologii v mashinobuduvanni* – С. 39-42.
  23. *Gerasimov, A.V.* Chislennoye modelirovaniye probitiya sloistykh pregrad (Numerical simulation of breaking through layered obstacles) / A.V. Gerasimov, S.V. Pashkov // *Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksiy* – tom 19, №1, 2013 – С. 49-62.
  24. *Cowper, G.R.* Strain hardening and strain rate effects in the impact loading of cantilever beams / G. R. Cowper, P. S. Symonds // *Brown Univ., Div. of Appl. Mech.* – 1952. - Report № 28. – 46 p.
  25. *Johnson, G.R.* A constitutive model and data for metals subjected to large strains, high strain rates and high temperatures / G. R. Johnson, W. H. Cook // *Proceedings of the 7-th International Symposium on Ballistics.* – The Hague, The Netherlands. – 1983. – P. 541-547.
  26. *Zerilli, E.J.* Dislocation mechanics based constitutive relations for material dynamics calculations / E. J. Zerilli, R. W. Armstrong // *J. Appl. Phys.* – 1987. – № 61(5). – P. 1816-1825.
  27. *Baulin D.S.* Matematychna model vysokoshyvdkisnoyi vzyemodiyi vrazhayuchoho elementa ta bahatosharovoyi pereshkody (Mathematical model of high-speed interaction of striking element and multilayer obstacle) / D.S. Baulin, S.A. Horyelyshev, S.A. Manzhora // *materialy VIII naukovo-prakt. konferentsiyi, sektsiya 2, Kharkiv, 29 bereznya 2018r.: tezy dopovidey.* – KH.: Natsionalna akademiya Natsionalnoyi hvardiyi Ukrainy, 2017. – S.117-119.
  28. *Patrony k strelkovomu oruzhiyu.* (Small arms ammunition) (Spravochnoye posobiye) / [Kolomiytsev A.V., Sobakar' I.S, Nikityuk V.G., Somov V.V.] – KH.: NII sudebnykh ekspertiz im. N.S. Bokariusa, 2003. – 336 s.

*Стаття надійшла до редакції 27.08.2019 р.*

*Baulin D., Manzhora S., Odechuk M., Odeychuk A., Horielyshev S., Ilchenko M.*

#### **CALCULATION OF ARMOR-RESISTANT METAL MULTILAYER ARMORED STRUCTURES USING THE FINITE ELEMENT METHOD**

At present, when the power of modern kinetic weapons is constantly increasing, traditional metallurgical and materials science approaches to the production of homogeneous rolled steel of armored steels are no longer able to provide high dynamic stability. Fulfillment of this requirement leads to a significant increase in the thickness of the armor and, accordingly, the mass of the armored structure as a whole. One of the ways to solve this problem is the use of multilayer metal composites. The combination of high hard (but brittle) and soft (but viscous) steel layers into composites provides composites with a combination of hardness and viscosity that cannot be achieved using traditional methods of manufacturing armored steels (an emergent property).

In this paper, the process of interaction of high-speed impactor with protective multilayered armored obstacles, which was created by welding solid layer composites in a solid phase (without melting) by vacuum-deformation technique is considered.

The mechanism of the use of the finite element method for calculating the protective strength of the protective obstacles is investigated. Selected and substantiated source data for simulation modeling. For the modeling of physical phenomena that occur in the impactor and obstacle, such as strain and speed hardening, temperature weakening, destruction, etc. models of behavior of materials were used, which in the general case consist of three main elements: the state of equation, plasticity model and the damage model.

The results of calculating the armored-strength resistance of a two-layer armor plate of the following structure: the first layer (frontal) - instrumental carbon steel HRC  $\geq 60$  thickness 6 mm, second (back) - steel HRC=40 thickness 4 mm with the impact of impact high-impact impressive element. Influence of the features of the technology of compound of layers on the behavior of the center of mass velocity and the bottom of bullet velocity of and the distribution of the equivalent stress across the Mises is considered. Further researches are related to obtaining the dependence of armor-resistant multilayer armor plates on their overall thickness and structure (composition and ratio of layers), which will allow formulating recommendations for the choice of protective structures.

**Keywords:** model; armor-resistant; high-speed impactor; protective multilayered obstacles; solid-phase welding; deformation.

*Баулін Д.С., Манжура С.А., Одейчук Н.П., Одейчук А.Н., Горельшиев С.А., Ильченко Н.И.*

### **РАСЧЕТ БРОНЕСТОЙКОСТИ МЕТАЛЛИЧЕСКИХ МНОГОСЛОЙНЫХ БРОНИРОВАННЫХ СТРУКТУР С ПОМОЩЬЮ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ**

В настоящее время, когда мощность современных средств кинетического поражения постоянно возрастает, традиционные металлургические и материаловедческие подходы к производству гомогенного (однородного) листового проката бронированных сталей уже не в состоянии обеспечить высокую динамическую стойкость без значительного увеличения толщины брони и, соответственно, массы бронезащитной структуры в целом. Одним из направлений решения этой проблемы является использование многослойных металлических композитов. Объединение в композиты слоев высокотвердой (но хрупкой) и мягкой (но вязкой) сталей обеспечивает композитам такое объединение твердости и вязкости, которое невозможно добиться с помощью традиционных методов изготовления бронированных сталей (свойство эмерджентности).

В данной работе рассматривается процесс взаимодействия высокоскоростного поражающего элемента с защитными многослойными бронированными преградами, которые созданы путем сварки слоев композита в твердой фазе (без расплавления) по вакуумно-деформационной методике.

Исследуется механизм использования метода конечных элементов для расчета бронестойкости защитных преград. Выбраны и обоснованы исходные данные для имитационного моделирования. Для моделирования физических явлений, которые происходят в поражающем элементе и преграде, таких как деформационное и скоростное упрочнения, температурное ослабление, разрушение и т.д. использовались модели поведения материалов, которые в общем случае, состоят из трех основных элементов: уравнения состояния (equation of state), модели пластичности (plasticity model) и модели разрушения (damage model).

Получены результаты расчета бронестойкости двухслойной бронепластины следующей структуры: первый слой (фронтальный) – инструментальная углеродистая сталь с твердостью HRC не ниже 60 единиц толщиной 6 мм, второй (тыльный) – сталь с твердостью HRC 40 единиц толщиной 4 мм, при воздействии удара высокоскоростного поражающего элемента. Рассмотрено влияние особенностей технологии соединения слоев на поведение скорости центра масс и дна пули и распределение эквивалентного напряжения по Мизесу. Дальнейшие исследования связаны с получением зависимости бронестойкости многослойных бронепластин от их общей толщины и структуры (состава и соотношения слоев), что позволит сформулировать рекомендации для выбора защитных структур.

**Ключевые слова:** модель, бронестойкость, высокоскоростной поражающий элемент, защитная многослойная преграда, сварка в твердой фазе, деформация.

УДК 531.66

*Баулін Д.С., Манжура С.А., Одейчук М.П., Одейчук А.М., Горельшиев С.А., Ильченко М.І.*

**Розрахунок бронестійкості металевих багатослоєвих броньованих структур за допомогою методу скінчених елементів / Опір матеріалів і теорія споруд: наук.-тех. збірн. – К.: КНУБА, 2019. – Вип. 103. – С. 145-164.**

Іл. 8. Бібліогр. 28 назв.

UDC 531.66

*Baulin D., Manzhura S., Odeychuk M., Odeychuk A., Horielyshev S., Ilchenko M.* **Calculation of armor-resistant metal multilayer armored structures using the finite element method / Strength of Materials and the Theory of Structures. – 2019. – Issue 103. – P. 145-164.**

Fig. 8. Ref. 28 items.

УДК 531.66

*Баулін Д.С., Манжура С.А., Одейчук Н.П., Одейчук А.Н., Горельшиев С.А., Ильченко Н.И.*

**Расчет бронестойкости металлических многослойных бронированных структур с помощью метода конечных элементов / Сопротивление материалов и теория сооружений: науч.-тех. сборн. – К.: КНУСА, 2019. – Вып. 103. – С. 145-164.**

Ил. 8. Библиогр. 28 назв.

**Автор (науковий ступінь, вчене звання, посада):** кандидат технічних наук, старший науковий співробітник, старший науковий співробітник науково-дослідного центру Національної академії Національної гвардії України, Національна академія Національної гвардії України. БАУЛІН Дмитро Станіславович

**Адреса:** 61001, Україна, м. Харків, майдан Захисників України 3, НАНГУ

**Мобільний тел.:** +38(095) 905-07-17

**Імейл:** baulinds1966@ukr.net

**ORCID ID:** <http://orcid.org/0000-0002-7082-6954>

*PhD of Technical Sciences, Senior Researcher, Senior Research of laboratory for the provision of Service and Military Activities of the National Guard of Ukraine Scientific and Research Center of Service and Military Activities of the National Guard of Ukraine  
National Academy of National Guard of Ukraine*

*BAULIN Дмитро*

*Zakhysnykiv Ukrainy sq., 3, Kharkiv, Ukraine, 61001*

**Contact tel.:** +38(095) 905-07-17

**E-mail:** baulinds1966@ukr.net

**ORCID ID:** [https:// orcid.org/0000-0002-7082-6954](https://orcid.org/0000-0002-7082-6954)

**Автор (науковий ступінь, вчене звання, посада):** ад'юнкт докторантури та ад'юнктури Національної академії Національної гвардії України, Національна академія Національної гвардії України. МАНЖУРА Святослав Анатолійович

**Адреса:** 61001 Україна, м. Харків, майдан Захисників України, 3, НАНГУ

**Мобільний тел.:** +38(067) 701-57-07

**Імейл:** manzura@ukr.net

**ORCID ID:** <http://orcid.org/0000-0003-4726-0320>

*Post-graduate student of Scientific and Research Center of Service and Military Activities of the National Guard of Ukraine*

*National Academy of National Guard of Ukraine*

*MANZHURA Sviatoslav*

*Zakhysnykiv Ukrainy sq., 3, Kharkiv, Ukraine, 61001*

**Contact tel.:** +38(067) 701-57-07

**E-mail:** manzura@ukr.net

**ORCID ID:** [https:// orcid.org/0000-0003-4726-0320](https://orcid.org/0000-0003-4726-0320)

**Автор (науковий ступінь, вчене звання, посада):** кандидат технічних наук, старший науковий співробітник, старший науковий співробітник Національного наукового центру "Харківський фізико-технічний інститут". Національний науковий центр "Харківський фізико-технічний інститут". ОДЕЙЧУК Микола Петрович.

**Адреса:** Україна, м. Харків, вул. Академічна, 1, ННЦ "ХФТИ".

**Мобільний тел.:** +38(067) 578-43-22;

**Імейл:** npodeychuk@ukr.net

**ORCID ID:** <http://orcid.org/0000-0002-6507-2588>

*PhD of Technical Sciences, Senior Researcher, Senior Research of National Science Center "Kharkiv Institute of Physics and Technology",*

*National Science Center "Kharkiv Institute of Physics and Technology"*

*ODECHUK Mikolai*

*Akademicheskaya St., 1, Kharkiv, 61008*

**Contact tel.:** +38(067) 578-43-22;

**E-mail:** npodeychuk@ukr.net

**ORCID ID:** [https:// orcid.org/0000-0002-6507-2588](https://orcid.org/0000-0002-6507-2588)

**Автор (науковий ступінь, вчене звання, посада):** кандидат технічних наук, старший науковий співробітник, старший науковий співробітник Національного наукового центру "Харківський фізико-технічний інститут". Національний науковий центр "Харківський фізико-технічний інститут". ОДЕЙЧУК Андрій Миколайович.

**Адреса:** Україна, м. Харків, вул. Академічна, 1, ННЦ "ХФТИ".

**Мобільний тел.:** +38(067) 579-10-76

**Імейл:** [anodeychuk@ukr.net](mailto:anodeychuk@ukr.net)

**ORCID ID:** <http://orcid.org/0000-0002-3061-2994>

*PhD of Technical Sciences, Senior Researcher, Senior Research of National Science Center "Kharkiv Institute of Physics and Technology",*

*National Science Center "Kharkiv Institute of Physics and Technology"*

*ODEYCHUK Andrii*

*Akademicheskaya St., 1, Kharkiv, 61008*

**Contact tel.:** +38(067) 579-10-76;

**E-mail:** [anodeychuk@ukr.net](mailto:anodeychuk@ukr.net)

**ORCID ID:** <https://orcid.org/0000-0002-3061-2994>

**Автор (науковий ступінь, вчене звання, посада):** кандидат технічних наук, доцент, старший науковий співробітник науково-дослідного центру Національної академії Національної гвардії України, Національна академія Національної гвардії України. ГОРСЛИШЕВ Станіслав Анатолійович.

**Адреса:** 61001 Україна, м. Харків, майдан Захисників України 3, НАНГУ.

**Мобільний тел.:** +38(067) 959-91-53

**Імейл:** [port\\_6633@ukr.net](mailto:port_6633@ukr.net)

**ORCID ID:** <http://orcid.org/0000-0003-1689-0901>

*PhD of Technical Sciences, Associate Professor, Senior Research laboratory for the provision of Service and Military Activities of the National Guard of Ukraine Scientific and Research Center of Service and Military Activities of the National Guard of Ukraine*

*National Academy of National Guard of Ukraine*

*HORIELYSHEV Stanislav*

*Zakhysnykiv Ukrainy sq., 3, Kharkiv, Ukraine, 61001*

**Contact tel.:** +38(067) 959-91-53

**E-mail:** [port\\_6633@ukr.net](mailto:port_6633@ukr.net)

**ORCID ID:** <https://orcid.org/0000-0003-1689-0901>

**Автор (науковий ступінь, вчене звання, посада):** начальник сектора Національного наукового центру "Харківський фізико-технічний інститут", Національний науковий центр "Харківський фізико-технічний інститут". ІЛЬЧЕНКО Микола Іванович.

**Адреса робоча:** Україна, м. Харків, вул. Академічна, 1, ННЦ "ХФТИ".

**Мобільний тел.:** +38(097) 894-75-07;

**Імейл:** [ilchenkomi@ukr.net](mailto:ilchenkomi@ukr.net)

**ORCID ID:** <http://orcid.org/0000-0003-3450-4904>

*Chief Department of National Science Center "Kharkiv Institute of Physics and Technology",*

*National Science Center "Kharkiv Institute of Physics and Technology"*

*ILCHENKO Nikolai*

*Akademicheskaya St., 1, Kharkiv, 61008*

**Contact tel.:** +38(097) 894-75-07;

**E-mail:** [ilchenkomi@ukr.net](mailto:ilchenkomi@ukr.net)

**ORCID ID:** <https://orcid.org/0000-0003-3450-4904>

УДК 624.953.014.2.004.15+539.3

## УПРАВЛІННЯ ПРОЕКТНОЮ НАДІЙНІСТЮ НАФТОВИХ РЕЗЕРВУАРІВ

**С.М. Семенець<sup>1</sup>,**

канд. техн. наук, доцент кафедри прикладної математики та інформаційних технологій

**С.С. Насонова<sup>2</sup>,**

канд. техн. наук, доцент кафедри вищої математики

**В.І. Олевський<sup>2</sup>,**

д-р техн. наук, зав. кафедри вищої математики

**Д.Л. Волчок<sup>1</sup>,**

канд. техн. наук, доцент кафедри будівельної механіки

<sup>1</sup>*Придніпровська державна академія будівництва та архітектури*<sup>2</sup>*Український державний хіміко-технологічний університет*

DOI: 10.32347/2410-2547.2019.103.165-176

**Анотація.** *Постановка проблеми.* Згідно з діючими в Україні нормативними документами [7,9] нафтові резервуари (РВС) проектується на основі методу граничних станів. Із застосуванням цього методу забезпечується надійність резервуарів в умовах і режимах роботи, передбачених нормами [6, 7]. Однак питання, пов'язані із забезпеченням надійності РВС, що проектується на термін служби, що перевищує нормативний, а також питання економічності ефективності прийнятих проектних рішень вимагають подальшої наукової розробки. У даній статті приводиться загальна методика оцінки надійності РВС протягом заданого напруження. Пропонується модель оптимального проектування РВС за критерієм мінімуму проектної вартості при забезпеченні заданого рівня надійності протягом потрібного терміну служби. Дана модель сформульована в термінах нелінійної задачі математичного програмування, а для її чисельної реалізації розроблений спеціальний алгоритм, заснований на принципах побудови «жадібних» алгоритмів. Приводяться отримані в результаті численних експериментів економічно раціональні проектні значення товщини конструктивних елементів резервуара об'ємом 5000 м<sup>3</sup> в залежності від необхідного рівня надійності. **Мета** - в рамках діючих норм проектування і з урахуванням наявних даних технічної діагностики РВС розробити метод раціонального забезпечення заданого рівня проектної надійності РВС протягом необхідного терміну експлуатації. **Висновки.** Запропонована модель оптимального проектування дозволяє управляти надійністю нафтових резервуарів за критерієм мінімуму початкової вартості при заданому терміні експлуатації. Параметри цієї моделі визначаються (і можуть коригуватися стосовно окремо взятого резервуару або парку резервуарів) за результатами статистичної обробки даних натурних обстежень аналогічних об'єктів, що підвищує точність прогнозу в кожному окремому випадку. В результаті розглянуті моделі та алгоритми можуть служити досить ефективним математичним інструментом при дослідженні проблем надійності і довговічності нафтових резервуарів.

**Ключові слова:** нафтовий резервуар; технічна діагностика; математична модель; управління надійністю.

### Вступ

Надійність сталевих вертикальних резервуарів наземного типу для довгострокового зберігання нафти і нафтопродуктів (РВС) в основному залежить від надійності їх сталевих конструкцій. В період експлуатації РВС відчувають механічні (статичні і динамічні) навантаження, схильні до впливу агресивних середовищ, температурних впливів і інших негативних чинників, які діють спільно і нерідко в самих несприятливих поєднаннях. Тому відмови нафтових резервуарів викликаються не тільки прикладеними навантажен-

нями, але і складними фізико-механічними процесами, що протікають в їх обсязі і на поверхні. Ці процеси носять яскраво виражений випадковий характер, а їх інтенсивність залежить від виду та рівня напружено-деформованого стану, ступеня деградації споруди.

Нафтові резервуари відносяться до споруд високого ступеня відповідальності. Порушення їх цілісності, а тим більше часткові або повні руйнування призводять до значних матеріальних і моральних збитків, що пов'язано з втратою нафтопродукту, забрудненням навколишнього середовища, і в багатьох випадках з людськими жертвами. Аварії великих РВС прийнято відносити до розряду катастроф державного масштабу. Так, тільки екологічний збиток від аварії нафтового резервуара може досягати двадцятикратної проектної вартості самої споруди.

Детальний аналіз досліджень, присвячених проблемі забезпечення надійності нафтових резервуарів, виконаний в огляді [1], показав, що в них належним чином не враховується вплив і значимість конструктивних елементів на оцінку рівня надійності резервуара в цілому. При цьому різні моделі і методи оцінки надійності зазвичай дають різні результати, які часто не відповідають даним натурних обстежень. Для попередження можливих великих аварій резервуарів необхідно класифікувати і систематизувати причини їх виникнення, що вимагає подальшого накопичення статистичного матеріалу про відмови РВС і передумови їх настання. Крім того маловивченою залишається проблема оцінки і забезпечення надійності РВС на різних стадіях їх життєвого циклу. Тому питання, пов'язані з оцінкою і ефективним управлінням надійністю нафтових резервуарів, є актуальними [1,2, 8, 10-12].

### **1. Постановка проблеми**

Згідно з діючими в Україні нормативними документами [7,9] нафтові резервуари проектуються на основі методу граничних станів. Із застосуванням цього методу забезпечується надійність РВС в умовах і режимах роботи, передбачених нормами [6,7]. Однак питання, пов'язані із забезпеченням надійності резервуарів, що проектуються на термін служби, що перевищує нормативний, а також питання економічної ефективності прийнятих проектних рішень вимагають подальшої наукової розробки.

У даній статті наводиться загальна методика оцінки надійності РВС протягом заданого напрацювання. Параметри відповідних розрахункових моделей визначаються на основі статистичної обробки даних технічної діагностики резервуарів, що раніше перебували в експлуатації, що підвищує точність прогнозу і достовірність отриманих результатів. Пропонується модель оптимального проектування РВС за критерієм мінімуму проектної вартості при забезпеченні заданого рівня надійності протягом необхідного терміну служби. Дана модель сформульована в термінах нелінійної задачі математичного програмування, а для її чисельної реалізації розроблений спеціальний алгоритм, заснований на принципах побудови «жадібних» алгоритмів. Наводяться отримані в результаті чисельних експериментів економічно раціональні проектні значення товщини конструктивних елементів резервуара об'ємом 5000 м<sup>3</sup> в залежності від необхідного рівня надійності.

## 2. Мета і задача дослідження

Мета - в рамках діючих норм проектування [7, 9] і з урахуванням наявних даних технічної діагностики РВС, що раніше перебували в експлуатації, розробити метод раціонального забезпечення заданого рівня проектної надійності РВС протягом необхідного терміну експлуатації.

Відповідно до даної мети ставляться такі завдання:

1. Розробити модель оптимального проектування РВС за критерієм мінімуму проектної вартості при забезпеченні заданого рівня надійності протягом необхідного терміну служби.

2. Розробити ефективний алгоритм чисельного розв'язання сформульованої задачі оптимального проектування.

3. На прикладі розрахунку резервуара об'ємом 5000 м<sup>3</sup> досліджувати вплив величини заданого рівня надійності на проектні значення товщини конструктивних елементів.

## 3. Основний матеріал

Відповідно до [7,8] нафтовий резервуар розглядається як складна система, що складається з 4-х логічно послідовно з'єднаних підсистем (основних конструктивних елементів): днища і покрівлі, що виконують захисну функцію; циліндричної стінки (безмоментної області корпусу резервуара, що працює на міцність і стійкість); вузла сполучення стінки з днищем (моментної області корпусу резервуара, що ще має назву уторного вузла, що працює на міцність). Загальна схема резервуара показана на рис. 1, а його структурна схема надійності зображена на рис. 2. Зварні з'єднання приймаються рівними по міцності до основного металу резервуару. Вважається, що резервуар виконує властиві йому функції з приймання, зберігання та відпуску нафтопродуктів в нормальних режимах роботи відповідно до діючих нормативних документів і з проектним рівнем заливу, а погіршення технічного стану резервуара в період експлуатації відбувається поступово і обумовлюється фізичним зносом його металоконструкцій. Під відмовою розуміється перехід об'єкта з працездатного стану в непрацездатний стан. Основним механізмом відмов резервуара вважається корозійний знос. При цьому приймається, що локальні корозійні пошкодження конструктивних елементів усуваються на основі поточних ремонтів, що проводяться в рамках діючої системи технічного обслуговування і ремонтів. Як критерій відмов резервуара приймається порушення хоча б одного з нормативних умов його міцності, стійкості і герметичності. Форс-мажорні ситуації типу катастроф, грубих помилок проектування, виготовлення і монтажу і т.д. не розглядаються.

Згідно [6,7] РВС протягом усього терміну служби повинні відповідати наступним нормативним вимогам ненастання граничного стану:

$$\gamma_c R_y \delta_i(t) - p_i r \geq 0, i = \overline{1, n}; \quad (1)$$

$$\gamma_c R_y \delta_1^2(t) - 6M_0 \geq 0; \quad (2)$$

$$1 - \left[ \frac{\sigma_1(t)}{\sigma_{cr1}(t)} + \frac{\sigma_2(t)}{\sigma_{cr2}(t)} \right] \geq 0; \quad (3)$$

$$\delta_{\text{дн}}(t) - \frac{\delta_{\text{дн}0}}{2} \geq 0; \quad (4)$$

$$\delta_{\text{кр}}(t) - \frac{\delta_{\text{кр}0}}{2} \geq 0. \quad (5)$$

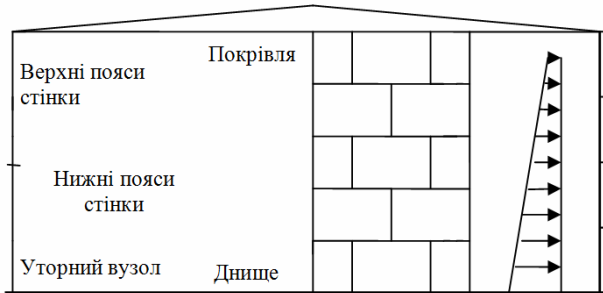


Рис. 1. Загальна схема РВС

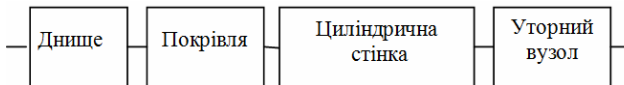


Рис. 2. Структурна схема надійності РВС

У наведених формулах (1) – (5) позначено:  $t$  – напрацювання конструктивного елемента;  $R_y$  – розрахунковий опір сталі;  $n$  – число поясів циліндричної стінки;  $\delta_i(t)$  ( $i = \overline{1, n}$ ) – залишкове (поточне) значення товщини  $i$ -го поясу;  $\delta_{\text{дн}}(t)$ ,  $\delta_{\text{кр}}(t)$  – залишкові (поточні) значення товщини, відповідно, днища і настилу покрівлі;  $\delta_{\text{дн}0}$ ,  $\delta_{\text{кр}0}$  – проектні значення товщини, відповідно, днища і настилу покрівлі;  $r$  – радіус серединної поверхні резервуара;  $\gamma_c$  – коефіцієнт умов роботи (для нижнього поясу  $\gamma_c = 0,6$ , для інших поясів циліндричної стінки  $\gamma_c = 0,9$ , для уторного вузла  $\gamma_c = 1,2$ );  $p_i$  – гідростатичний тиск на  $i$ -й пояс;  $\sigma_1(t)$ ,  $\sigma_2(t)$  – поточні значення меридіональних і кільцевих напружень, що виникають в стінці від, відповідно, поздовжніх і радіальних зовнішніх навантажень;  $\sigma_{cr1}(t)$ ,  $\sigma_{cr2}(t)$  – критичні значення напружень при стисканні, відповідно, в осьовому і радіальному напрямку;  $M_0$  – момент, що вигинає, в зоні сполучення стінки з днищем.

Далі ліві частини нерівностей (1) – (5) позначимо, відповідно,  $Z_i(t)$ ,  $Z_s(t)$ ,  $Z_y(t)$ ,  $Z_d(t)$ ,  $Z_k(t)$ . Функції  $Z_i(t)$  ( $i = \overline{1, n}$ ) назвемо залишковими запасами міцності поясів циліндричної стінки, функцію  $Z_s(t)$  – залишковим запасом міцності вузла сполучення стінки з днищем,  $Z_y(t)$  – залишковим запасом



стійкості циліндричної стінки,  $Z_d(t)$ ,  $Z_k(t)$  – залишковими запасами герметичності, відповідно, днища і покрівлі.

Внаслідок корозійного зносу товщина конструктивних елементів РВС в період експлуатації зменшується. Залишкове значення товщини будь-якого конструктивного елемента резервуара, що має напрацювання  $t$ , можна описати співвідношенням

$$\delta(t) = \delta_0 - \Delta(t), \quad (6)$$

де  $\delta_0$  і  $\Delta(t)$  – відповідно, проектне значення товщини і поточна величина незворотного корозійного зносу конструктивного елемента.

Важливо відзначити, що система функцій  $Z_i(t)$ ,  $Z_s(t)$ ,  $Z_y(t)$ ,  $Z_d(t)$ ,  $Z_k(t)$  спільно з співвідношенням (6) описує зміну технічного стану нафтових резервуарів внаслідок корозійного зносу їх конструктивних елементів. З огляду на випадковий характер корозії, кожну з перерахованих функцій будемо розглядати як випадкову функцію величини незворотного корозійного зносу, що залежить від часу як від параметра.

Результати статистичної обробки даних великого числа натурних обстежень [3] показують, що корозійний знос сталевих конструкцій нафтових резервуарів досить добре описується нормальним законом розподілу ймовірностей. Тому, з огляду на роботи [4, 8], далі приймається, що при будь-якому фіксованому напрацюванні  $t$  значення зазначених вище залишкових запасів також розподіляються за нормальним законом.

Введемо до розгляду індекси забезпеченості міцності, стійкості та герметичності резервуарних конструкцій, що визначаються як відношення математичного очікування до середньоквадратичного відхилення відповідних залишкових запасів. Індексом забезпеченості міцності  $i$ -го пояса циліндричної стінки при заданому напрацюванні  $t$  будемо називати функцію виду

$$w_i(t) = \frac{\bar{Z}_i(t)}{\tilde{Z}_i(t)} = \frac{\gamma_c R_y [\delta_{i0} - \bar{\Delta}_i(t)] - p_i r}{\gamma_c R_y \tilde{\Delta}_i}, \quad i = \bar{1}, n, \quad (7)$$

де надстроchna риса і хвиляста лінія позначають, відповідно, математичне очікування і середньоквадратичне відхилення випадкової величини.

Аналогічно (7) визначаються індекси забезпеченості міцності уторного вузла  $w_s(t)$ , стійкості циліндричної стінки  $w_y(t)$ , а також герметичності днища  $w_d(t)$  і покрівлі  $w_k(t)$ . Відповідні формули наведені в [8].

Зауважимо, що всі зазначені вище індекси забезпеченості є безрозмірними детермінованими функціями часу і виражаються через математичні очікування і середньоквадратичне відхилення незворотного корозійного зносу конструктивних елементів резервуара. Їх значення можуть прогнозуватися в часі і коригуватися в кожному окремому випадку за фактичними вимірами товщини конструктивних елементів при технічних обстеженнях резервуарів.

З огляду на співвідношення (1) і прийнятий нормальний закон розподілу значень розглянутих вище запасів, можна записати наступну

розрахункову модель збереження міцності  $i$ -го поясу циліндричної стінки резервуара протягом заданого напрацювання:

$$P_i(t) = P(Z_i(t) \geq 0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{w_i} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) du. \quad (8)$$

Аналогічно, беручи до уваги співвідношення (2) - (5), через функцію нормованого нормального розподілу і відповідні індекси забезпеченості виражаються ймовірності збереження міцності уторного вузла  $P_s(t)$ , стійкості циліндричної стінки  $P_y(t)$ , герметичності днища  $P_d(t)$  і покрівлі  $P_k(t)$ . Розрахункові моделі для оцінки цих ймовірностей при заданому напрацюванні  $t$  наведені в [8].

При визначенні ймовірності безвідмовної роботи всього резервуару будемо виходити з таких очевидних положень.

1. Відмова резервуара настає при відмові хоча б одного з його основних конструктивних елементів.

2. Корозія є головним і загальним механізмом відмов конструктивних елементів резервуара.

3. Відмови конструктивних елементів є статистично залежними подіями (що робить некоректним застосування відомого правила множення ймовірностей при визначенні ймовірності безвідмовної роботи всього резервуара).

З урахуванням даних положень, ймовірність безвідмовної роботи резервуара протягом заданого напрацювання може бути наближено оцінена на основі моделі «слабшої ланки» [4, 8]. Відповідно до цієї моделі, якщо відмови елементів системи з логічно послідовним з'єднанням елементів викликаються однією і тією ж причиною, то першим виходить з ладу «слабший» елемент, ймовірність відмови якого найбільша (прикладом може служити руйнування механічного ланцюга, якщо прикладене навантаження, що перевищує міцність однієї довільної ланки). Стосовно до нафтових резервуарів модель «слабшої ланки» має такий вигляд [8]:

$$P_{rez}(t) = \min\{P_c(t), P_s(t), P_d(t), P_k(t)\}, \quad (9)$$

де  $P_c(t)$  – ймовірність безвідмовної роботи циліндричної стінки, яка оцінюється за формулою

$$P_c(t) = \min\{P_i(t), \dots, P_n(t), P_y(t)\}, \quad (10)$$

Слід зазначити, що ймовірність  $P_{rez}(t)$  розглядається нами як ймовірність ненастання граничного стану резервуара в умовах і режимах роботи, передбачених діючою системою технічного обслуговування і ремонтів. Цю ймовірність ще можна трактувати як ймовірність того, що протягом заданого напрацювання  $t$  не буде потрібно проводити капітальний ремонт резервуару.

Поставимо наступну задачу оптимального проектування. Розглядається проект РВР, визначений з точністю до значень товщини основних конструктивних елементів: днища, настилу покрівлі, поясів циліндричної

стілки і вузла сполучення стінки з днищем. Обшивка резервуару повинна витримувати комбіноване навантаження гідростатичного тиску, а також поздовжнього (снігове навантаження) і поперечного (вітрове навантаження) стиснення. Задані строк служби  $T$  і необхідний рівень надійності резервуара  $P^*$ . Потрібно знайти такі значення товщини конструктивних елементів резервуара, які протягом часу  $T$  з ймовірністю не менш ніж  $P^*$  забезпечують його нормальну роботу (в умовах і режимах, передбачених діючою системою технічного обслуговування і ремонтів) при мінімально можливій початкової (проектної) вартості.

Вважаючи, що проектна вартість резервуара пропорційна його проектній масі, отримаємо наступну оптимізаційну модель:

$$2\pi r \frac{L}{n} \rho \sum_{i=1}^n x_i + \pi r^2 \rho (x_{n+1} + x_{n+2}) \rightarrow \min, \quad (11)$$

$$P_{rez}(x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, t) \geq P^*, t \in [0, T]; \quad (12)$$

$$\delta^- \leq x_i \leq \delta^+, i = \overline{1, n+2}, \quad (13)$$

де  $P_{rez}$  – ймовірність безвідмовної роботи резервуара, що визначається за (9);  $x_1, x_2, \dots, x_n$  – проектні значення товщини поясів циліндричної стінки;  $x_{n+1}, x_{n+2}$  – проектні значення товщини, відповідно, днища і настилу покрівлі;  $\delta^-, \delta^+$  – відповідно, нижня і верхня границі зміни проектної товщини конструктивних елементів, що визначаються сортаментом листової сталі;  $r, L$  – відповідно, радіус і висота резервуару;  $\rho$  – питома вага сталевого прокату.

На основі моделі (11) - (13) визначаються такі (оптимальні) значення невідомих  $x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}, x_{n+2}$ , які доставляють мінімум цільовій функції (11) при виконанні обмежень (12) і (13).

Дана модель відноситься до класу задач нелінійного математичного програмування і має такі особливості:

1. Цільова функція (11) є адитивною.
2. Обмеження (12) рівносильно наступній системі нерівностей

$$\begin{aligned} w_1(X, T) \geq w^*, \dots, w_n(X, T) \geq w^*, w_s(X, T) \geq w^*, \\ w_y(X, T) \geq w^*, w_d(X, t) \geq w^*, w_k(X, T) \geq w^*, \end{aligned} \quad (14)$$

де  $X = (x_1, x_2, \dots, x_{n+2})$  – вектор невідомих;  $w^*$  – мінімально допустиме значення індексів забезпеченості міцності, стійкості і герметичності, яке визначається по таблиці значень функції нормованого нормального розподілу в залежності від величини  $P^*$ .

З огляду на зазначені особливості, а так само те, що нижні пояси корпусу резервуара працюють, головним чином, на міцність, а верхні пояси - на стійкість, для чисельної реалізації моделі (11) - (13) був розроблений «жадібний» алгоритм, який передбачає виконання  $n+2$  кроків. На кожному з цих кроків визначалося локально оптимальне (мінімальне) значення товщини окремого конструктивного елемента, що

відповідає відповідним обмеженням системи (14), з наступним округленням до більшого значення.

Чисельні розрахунки проводилися стосовно проекту РВС-5000 при наступних вихідних даних:  $L=1490$  см;  $r=1046$  см;  $n=10$ ;  $R_y=230$  МПа;  $T=40$  років. Висота затоки приймалася рівною 1420 см, щільність нафтопродукту, що зберігається –  $0.0009$  кг/см<sup>3</sup>, надлишковий тиск в газовому просторі – 2.0 кПа, вакуум – 0.25 кПа; кількість циклів навантаження в рік – 60. Значення товщини конструктивних елементів варіювалися від  $\delta^- = 1$  мм до  $\delta^+ = 12$  мм.

Величина незворотного корозійного зносу конструктивних елементів резервуара при заданому напрацюванні  $t$  визначалася за спрощеною формулою

$$\Delta(t) = v_s t,$$

де  $v_s$  – середня швидкість поверхневої корозії конструктивного елементу, яка розглядалася як випадкова величина, розподілена за нормальним законом. У розрахунках використовувалися статистичні характеристики швидкостей поверхневої корозії конструктивних елементів резервуарів для зберігання світлих нафтопродуктів (бензин, гас, дизельне паливо). Їх значення приймалися по [3].

На рис. 3 наведені графіки, що показують зміну проектної товщини конструктивних елементів РВС-5000 в залежності від заданої величини  $P^*$  при проектному терміні експлуатації  $T=40$  років.

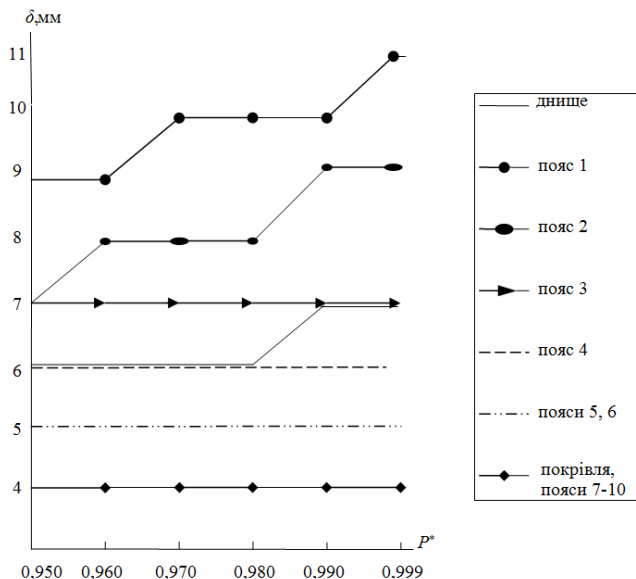


Рис. 3. Зміна проектної товщини конструктивних елементів РВС -5000 в залежності від необхідного рівня надійності  $P^*$

Аналізуючи показані графіки, неважко помітити, що збільшення необхідного рівня надійності  $P^*$  призводить, в першу чергу, до збільшення проектних значень товщини днища і перших двох поясів корпусу резервуара. Це говорить про те, що забезпечення надійності РВС пов'язано, головним чином, із забезпеченням міцності двох нижніх поясів і герметичності днища. При цьому ключову роль відіграє міцність 1-го поясу, що підтверджується даними численних натурних обстежень цих споруд. Крім того наведені графіки показують, що збільшення величини  $P^*$  практично не впливає на проектні значення товщини верхніх поясів і настилу покрівлі. Це означає, що для резервуарів даного типу втрата стійкості не характерна, а жорсткість вимог до надійності покрівлі пов'язано, перш за все, зі збільшенням обсягу діагностичних та ремонтно-відновлювальних робіт, вироблених в рамках діючої системи технічного обслуговування і ремонтів.

### Висновки

Оптимізаційна модель (11) - (13) дозволяє управляти проектною надійністю нафтових резервуарів за критерієм мінімуму початкової вартості при заданому терміні експлуатації. Параметри цієї моделі визначаються (і можуть коригуватися стосовно окремо взятому резервуару або парку резервуарів) за результатами статистичної обробки даних натурних обстежень аналогічних об'єктів, що підвищує точність прогнозу в кожному окремому випадку. В результаті розглянуті моделі та алгоритми можуть служити досить ефективним математичним інструментом при дослідженні проблем надійності і довговічності нафтових резервуарів.

### СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Гайсин Э.Ш.* Современное состояние проблемы обеспечения надежности резервуаров для нефти и нефтепродуктов / Э.Ш. Гайсин, М.Ш. Гайсин // Транспорт и хранение нефтепродуктов и углеводородного сырья. – М: ОБРАКАДЕМНАУКА, 2016. – №2. – С.31–40.
2. *Гайсин Э.Ш.* Оценка надежности резервуаров вертикальных стальных по критерию вероятности безаварийной работы / Э.Ш. Гайсин, Ю.А. Фролов // Транспорт и хранение нефтепродуктов и углеводородного сырья. – М: ОБРАКАДЕМНАУКА, 2014. – №4. – С.11–15.
3. *Егоров Е.А.* Исследование и методы расчетной оценки прочности, устойчивости и остаточного ресурса стальных резервуаров, находящихся в эксплуатации: монография / Е.А. Егоров. – Днепропетровск: ПГАСА, 1996. – 99 с.
4. *Капур К.* Надежность и проектирование систем / К. Капур , Л. Ламберсон: пер. с англ. Коваленко Е.Г., под ред. Ушакова И.А. – М.: Мир, 1980. – 604 с.
5. *Каштанов В. А.* Теория надежности сложных систем: учебное пособие / В.А. Каштанов, А.И. Медведев. – М.: Физматлит, 2010. – 606 с.
6. Правила технічної експлуатації резервуарів та інструкції по їх ремонту: [змінені розділи та пункти розділів] / ДПН УкрДНПРОнафтотранс. – [Чинні від 03.07. 1999]. – Київ.: Укрнафтопродукт, 1997. – 297 с.
7. Резервуари вертикальні сталеві для зберігання нафти і нафтопродуктів з тиском насичених парів не вище 93.3 кПа: ВН 2.2-58.2-94 / Держ. ком. України по нафті і газу. – [Чинні від 01.10.1994]. – Київ: Держкомнафтогаз, 1994. – 98 с.
8. *Семенец С.Н.* Расчетные модели надежности нефтяных резервуаров / С.Н. Семенец, С.С. Насонова, Ю.Е. Власенко, Л.Ю. Кривенкова // Вісник ПДАБА.– Дніпропетровськ: ПДАБА, 2018. – №1. – С.60-67.
9. Сталеві конструкції. Норми проектування: ДБН В.2.6-198:2014.– [Чинний з 1.01. 2015]. – Київ.: Мінрегіон України, 2014. – 205с.

10. *Andrianov I. V., Olevskiy V. I. and Olevska Yu. B.* Estimation of parameter-dependent plates vibrations on the basis of the asymptotic method in AMiTaNS'18, AIP Conference Proceedings. – 2018, 2025, edited by M. D. Todorov (American Institute of Physics, Melville, NY), P. 070001. doi: 10.1063/1.5064913.
11. *Olevskiy V.I.* Asymptotic estimation of free vibrations of nonlinear plates with complicated boundary conditions / I.V. Andrianov, V.I. Olevskiy, Yu.B. Olevska / AIP Conference Proceedings. – 2017, 1895, P. 080001-1–080001-10. doi: 10.1063/1.5007395.
12. *Olevska Yu.* Mathematical models of magnetite desliming for automated quality control systems / Yu. Olevska, V. Mishchenko, and V. Olevskiy / AIP Conference Proceedings. – 2016, 1773, P. 040007-1–040007-6. doi: 10.1063/1.4964970.

## REFERENCES

1. *Gaysin E.Sh. and Gaysin M.Sh.* *Sovremennoe sostoyaniye problemy obespecheniya nadezhnosti rezervuarov dlia nefi i nefteproduktov* [The current state of the problem of ensuring the reliability of petroleum reservoirs]. *Transport i khraneniye nefteproduktov i uglevodorodnogo syria* [Transportation and storage of petroleum products and hydrocarbons]. Moscow: Obrakademnauka Publ., 2016. – №2. – pp. 31–40 (in Russian).
2. *Gaysin E.Sh. and Frolov Yu.A.* *Otsenka nadezhnosti rezervuarov vertikalnykh stalnykh po kriteriyu veroyatnosti bezavariynoy raboty* [Evaluation of the reliability of vertical steel reservoirs by the criterion of the probability of trouble-free operation]. *Transport i khraneniye nefteproduktov i uglevodorodnogo syria* [Transportation and storage of petroleum products and hydrocarbons]. Moscow: Obrakademnauka Publ., 2014. – №4. – pp. 11–15 (in Russian).
3. *Egorov E.A.* *Issledovaniye i metody raschetnoy otsenki prochnosti, ustoychivosti i ostatochnogo resursa stalnykh rezervuarov, nakhodiashchikhsia v ekspluatatsii* [Research and methods of calculation estimation of durability, stability and remaining resource of steel reservoirs being in exploitation]: *Sb. nauch. trudov* [Coll. scientific. works], 1999, 99 p. (in Russian).
4. *Kapur K. and Lamberson L.* *Nadezhnost i proektirovaniye sistem* [Reliability and designing systems]. Moscow: Mir Publ., 1980, 604p. (in Russian).
5. *Kashtanov V.A. and Medvedev A.I.* *Teoriya nadezhnosti slozhnykh sistem* [Theory of reliability of complex system]. Moscow: Fizmatlit Publ., 2010, 606 p. (in Russian).
6. *Pravyla tekhnichnoi ekspluatatsii rezervuariv ta instruktzii po yikh remontu . Dopovnennia ta sminy* [Rules of technical exploitation of reservoirs and instruction are on their repair. Addition and changes]. Kyiv: Ukrnaftoprodukt Publ., 1997, 297 p. (in Ukrainian).
7. *Reservuary vertikalni stalevi dlia sberigannia nafty i naftoproduktiv s tyskom nasychenykh pariv ne vyshche 93.3 kPa* [Reservoirs are vertical steel for storage oils and oil products with pressure of saturated napiv not higher 93.3 kPa]. *VBN 2.2-58.2-94* [Department building norms of Ukraine VBN 2.2-58.2-94]. Kyiv: 1994, 98 p. (in Ukrainian).
8. *Semenets S.N., Nasonova S.S., Vlasenko Y.E. and Krivencova L.Y.* *Raschetniye modeli nadezhnosti nefiannykh rezervuarov* [Calculation models of reliability of petroleum reservoirs]. *Visnyk PDABA* [Newspaper of Pridneprovsk State Academy of Civil Engineering and Architecture]. Dnipropetrovsk: PDABA, 2018. – №1. pp. 60-67 (in Russian).
9. *Stalevi konstruktzii. Normy proektuvannia.* [Steel construction. Design standards]. *DBN V.2.6-198:2014.* [State building norms of Ukraine DBN V.2.6-198:2014]. Kyiv: Minregion Ukraine Publ., 2014, 205p. (in Ukrainian).
10. *Andrianov I. V., Olevskiy V. I. and Olevska Yu. B.* Estimation of parameter-dependent plates vibrations on the basis of the asymptotic method in AMiTaNS'18, AIP Conference Proceedings. – 2018, 2025, edited by M. D. Todorov (American Institute of Physics, Melville, NY), P. 070001. doi: 10.1063/1.5064913.
11. *Olevskiy V.I.* Asymptotic estimation of free vibrations of nonlinear plates with complicated boundary conditions / I. V. Andrianov, V. I. Olevskiy, Yu. B. Olevska / AIP Conference Proceedings. – 2017, 1895, P. 080001-1–080001-10. doi: 10.1063/1.5007395.
12. *Olevska Yu.* Mathematical models of magnetite desliming for automated quality control systems / Yu. Olevska, V. Mishchenko and V. Olevskiy / AIP Conference Proceedings. –2016, 1773, P.040007-1–040007-6. doi: 10.1063/1.4964970

*Semenets S.N., Nasonova S.S., Olevskiy V.I., Volchok D.L.*

## PROJECT RELIABILITY MANAGEMENT OF PETROLEUM RESERVOIRS

**Abstract. Raising of the problem.** According to the regulatory documents in Ukraine [7,9], petroleum reservoirs (RVS) are designed on the basis of the limit state method. Using this method ensures the reliability of tanks in the conditions and modes of operation stipulated by regulatory documents [6,7]. However, issues related to ensuring the reliability of RVS designed for a service life exceeding the normative, as well as questions of the economic efficiency of the design decisions made, require further scientific study. This article provides a general methodology for assessing the reliability of the RVS over a given operating time. A model of optimal design of RVS is proposed according to the criterion of the minimum project cost while ensuring a given level of reliability over the required service life. This model is formulated in terms of a non-linear mathematical programming problem, and a special algorithm has been developed for its numerical implementation, based on the principles of constructing "greedy" algorithms. The economically rational design values of the thickness of the structural elements of the reservoir with a volume of 5000 m<sup>3</sup> depending on the required level of reliability are given as a result of numerical experiments.

**Purpose of the article** is to develop a method for rationally ensuring a given level of design reliability of the RVS over the required service life within the framework of the existing design standards and taking into account the available data of the technical diagnostics of the RVS.

**Conclusions.** The proposed optimization model allows you to manage the design reliability of the RVS by the criterion of the minimum initial cost for a given period of operation. The parameters of this model are determined (and can be adjusted for a single tank or a fleet of tanks) based on the results of statistical processing of data from field surveys of similar objects, which improves the accuracy of the forecast in each individual case. As a result, the considered models and algorithms can serve as a rather effective mathematical tool in the study of the problems of reliability and durability of the RVS.

**Keywords:** petroleum reservoir; technical diagnostics; mathematical model; reliability management.

*Семенец С.Н., Насонова С.С., Олевский В.И., Волчок Д.Л.*

## УПРАВЛЕНИЕ ПРОЕКТНОЙ НАДЕЖНОСТЬЮ НЕФТЯНЫХ РЕЗЕРВУАРОВ

**Аннотация. Постановка проблемы.** Согласно действующим в Украине нормативным документам [7,9] нефтяные резервуары (РВС) проектируются на основе метода предельных состояний. С применением этого метода обеспечивается надежность резервуаров в условиях и режимах работы, предусмотренных нормами [6,7]. Однако вопросы, связанные с обеспечением надежности РВС, проектируемых на срок службы, превышающий нормативный, а также вопросы экономической эффективности принимаемых проектных решений требуют дальнейшей научной проработки. В данной статье приводится общая методика оценки надежности РВС на протяжении заданной наработки. Предлагается модель оптимального проектирования РВС по критерию минимума проектной стоимости при обеспечении заданного уровня надежности на протяжении требуемого срока службы. Данная модель сформулирована в терминах нелинейной задачи математического программирования, а для ее численной реализации разработан специальный алгоритм, основанный на принципах построения «жадных» алгоритмов. Приводятся полученные в результате численных экспериментов экономически рациональные проектные значения толщины конструктивных элементов резервуара объемом 5000 м<sup>3</sup> в зависимости от требуемого уровня надежности. **Цель** – в рамках действующих норм проектирования и с учетом имеющихся данных технической диагностики РВС разработать метод рационального обеспечения заданного уровня проектной надежности РВС на протяжении требуемого срока эксплуатации. **Выводы.** Предложенная оптимизационная модель позволяет управлять проектной надежностью нефтяных резервуаров по критерию минимума начальной стоимости при заданном сроке эксплуатации. Параметры этой модели определяются (и могут корректироваться применительно к отдельно взятому резервуару или парку резервуаров) по результатам статистической обработки данных натурных обследований аналогичных объектов, что повышает точность прогноза в каждом отдельном случае. В итоге рассмотренные модели и алгоритмы могут служить достаточно эффективным математическим инструментом при исследовании проблем надежности и долговечности нефтяных резервуаров

**Ключевые слова:** нефтяной резервуар; техническая диагностика; математическая модель; управление надежностью.

УДК 624.953.014.2.004.15+539.3

*Семенець С.М., Насонова С.С., Олевський В.І., Волчок Д.Л. Управління проектною надійністю нафтових резервуарів // Опір матеріалів і теорія споруд. – 2019. – Вип. 103. – С. 165 – 176.*

*В рамках діючих норм проектування і з урахуванням наявних даних технічної діагностики РВС розроблений метод раціонального забезпечення заданого рівня проектною надійності РВС протягом необхідного терміну експлуатації.*

Ил. 3. Бібліогр. 12 назв.

*Semenets S.N., Nasonova S. S., Olevskiy V.I., Volchok D.L. Project reliability management of petroleum reservoirs // Strength of material and theory of structure. – 2019. – Issue 103. – P. 165 – 176. – Ukr.*

*In the framework of the existing design standards and taking into account the available technical diagnostics data for RVS, a method has been developed for rationally ensuring the specified level of RVS design reliability over the required service life.*

Fig. 3. Ref. 12 items.

*Семенец С.Н., Насонова С.С., Олевский В.И., Волчок Д.Л. Управление проектной надежностью нефтяных резервуаров // Сопротивление материалов и теория сооружений. – 2019. – Вып. 103. – С. 165 – 176.*

*В рамках действующих норм проектирования и с учетом имеющихся данных технической диагностики РВС разработан метод рационального обеспечения заданного уровня проектной надежности РВС на протяжении требуемого срока эксплуатации.*

Ил. 3. Библиогр. 12 назв.

**Автор (вчена ступень, вчене звання, посада):**

*кандидат технічних наук, доцент, доцент кафедри прикладної математики та інформаційних технологій*

*Адреса: 49600, м. Дніпро, вул. Чернишевського, 24а ДВНЗ "Придніпровська державна академія будівництва та архітектури, СЕМЕНЕЦЬ Сергій Миколайович.*

*Мобільний тел.:* +380676396064;

*Імейл:* [ssemenets28@gmail.com](mailto:ssemenets28@gmail.com)

**ORCID ID:** <https://orcid.org/0000-0002-6359-1069>

**Автор (вчена ступень, вчене звання, посада):**

*кандидат технічних наук, доцент, доцент кафедри вищої математики*

*Адреса: 49005, м. Дніпро, пр. Гагаріна, 8, ДВНЗ «Український державний хіміко-технологічний університет», НАСОНОВА Світлана Сергіївна.*

*Мобільний тел.:* +380979409856

*Імейл:* [ms.nasonova.s@gmail.com](mailto:ms.nasonova.s@gmail.com)

**ORCID ID:** <https://orcid.org/0000-0002-0920-7417>

**Автор (вчена ступень, вчене звання, посада):**

*доктор технічних наук, завідувач кафедри вищої математики*

*Адреса: 49005, м. Дніпро, пр. Гагаріна, 8, ДВНЗ «Український державний хіміко-технологічний університет», ОЛЕВСЬКИЙ Віктор Ісаакович*

*Мобільний тел.:* +380503402207

*Імейл:* [ileft@i.ua](mailto:ileft@i.ua)

**ORCID ID:** <https://orcid.org/0000-0003-3824-1013>

**Автор (вчена ступень, вчене звання, посада):**

*кандидат технічних наук, доцент, доцент кафедри будівельної механіки та опору матеріалів, заступник декана факультету промислового та цивільного будівництва*

*Адреса: 49600, м. Дніпро, вул. Чернишевського, 24а ДВНЗ "Придніпровська державна академія будівництва та архітектури, ВОЛЧОК Денис Леонідович*

*Мобільний тел.:* +38(066) 727-656-0

*Імейл:* [Denys.L.Volchok@gmail.com](mailto:Denys.L.Volchok@gmail.com)

**ORCID ID:** <https://orcid.org/0000-0002-7914-321X>



УДК: [539.4:678.742.3]:616.728.2-089.168

## ОЦІНКА ЕФЕКТИВНОСТІ ФІКСАЦІЇ РОЗРІЗУ КАПСУЛИ КУЛЬШОВОГО СУГЛОБА ПОЛІПРОПІЛЕНОВОЮ СІТКОЮ

**С.П. Панченко<sup>1</sup>**,  
канд. техн. наук, доцент

**С.О. Масленников<sup>2</sup>**,  
асистент

**М.Л. Головаха<sup>2</sup>**,  
д-р .мед. наук, професор

<sup>1</sup>*Державний вищий навчальний заклад «Придніпровська державна академія  
будівництва та архітектури»  
вул. Чернишевського 24а, Дніпро, Україна, 49600*

<sup>2</sup>*Запорізький державний медичний університет  
проспект Маяковського 26, Запоріжжя, Україна, 69035*

DOI: 10.32347/2410-2547.2019.103.177-188

Виконується оцінка ефективності закриття дефекту капсули кульшового суглоба поліпропіленовою сіткою на підставі аналізу напружено-деформованого стану моделей фіксації розрізу системи «капсула-головка ендопротеза».

**Ключові слова:** капсула, кульшовий суглоб, ендопротез, напружено-деформований стан, модель, метод скінчених елементів

**Вступ.** Вивих стегнового компонента ендопротеза є одним з найбільш частих ускладнень ТЕКС (тотальне ендопротезування кульшового суглоба). Розрізняють безліч чинників розвитку вивихів, згрупованих в три основні категорії: пацієнтзалежне, імплантатзалежне і пов'язані з оперативною технікою [1]. Кращим варіантом «лікування» вивиху ТЕКС є запобігання розвитку первинної нестабільності [2, 3]. Однак, існують випадки, коли навіть при правильній установці компонентів ендопротеза виникають вивихи, викликані слабкістю або дефектом капсульно-зв'язкового апарату.

Особливо актуальним питання відновлення капсульно-зв'язкового апарату є для людей з ожирінням, яке клінічно характеризується відкладенням жиру в різних частинах тіла, в тому числі в області стегон, передньої черевної стінки. В цьому випадку, через надмірне відкладення жирової тканини, під час присідання виникає механічна перешкода і створюється додаткова точка фіксації, в якій виникає сила. Така сила іноді може досягати 20% ваги тіла [4]. Це змінює кінематику рухів при повному згинанні і збільшує ризик вивиху головки ендопротеза з чашки вертлюжної западини (рис. 1).

При задньо-латеральному доступі, ретельне відновлення задніх структур капсули і зовнішніх ротаторів (сухожилля *m.piriformis*) нитками що не розчиняються, є одним з головних умов, але не завжди можливим для виконання. Багато авторів стверджують, що ретельне відновлення

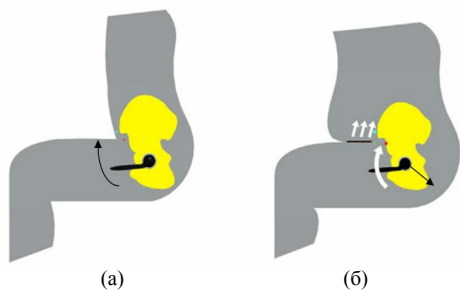


Рис. 1. Схема розвитку вивиху головки ендопротеза кульшового суглоба у пацієнтів з ожирінням: а) схема сагітальній площині у пацієнта, яка не страждає на ожиріння; б) несприятлива кінематика у пацієнта з ожирінням

структур м'яких тканин або, принаймні, збереження цих структур за допомогою модифікованих доступів значно скорочує частоту виникнення вивихів, пов'язаних з задньо-латеральним хірургічним доступом. Так, було підраховано, що при зазначеному доступі без відновлення м'яких тканин ризик виникнення вивиху в 8,21 разів вище, ніж при такому ж доступі, але з відновленням м'яких тканин

[5]. Крім того, доведено залежність стабільності ендопротеза стегна від товщини капсули. Капсула суглоба товщиною 1 мм витримує в 2 рази менші навантаження, що призводять до вивиху, ніж капсула суглоба товщиною в 3,5 мм і в 3 рази менші навантаження при максимальних значеннях товщини капсули – 6 мм [6]. Слід також зазначити, що накладання швів навіть при значних пошкодженнях капсули позовжнім розрізом успішно відновлює стабільність в межах приблизно 10% від базового рівня. Таким чином, доведена значимість відновлення і зміцнення структур капсульно-зв'язкового апарату стає в єдиний ряд з такими методами профілактики розвитку вивихів ендопротеза стегна як ретельне передопераційне планування, вірна установка компонентів і ведення пацієнтів в післяопераційному періоді.

В даний час розроблено безліч способів зміцнення та відновлення задніх структур капсули кульшового суглоба за допомогою ауто- і алломатеріалів, що розрізняються як за методикою фіксації, так і за характеристиками самих матеріалів, які нарівні з перевагами мають і низку недоліків, будь-то дорожнеча виробництва або необхідність особливих навичок оперуючого хірурга і т.п. У даній роботі досліджується спосіб відновлення і зміцнення задніх структур капсули кульшового суглоба за допомогою сітчастих імплантатів на основі поліпропілену. Суть запропонованого способу полягає в тому, що після установки всіх компонентів ендопротеза кульшового суглоба, в проекції дефекту капсули на зовнішню її поверхню накладають поліпропіленову сітку. При цьому її краю підшивають до вільних краях капсули, по всьому її периметру на всю товщу капсули, таким чином, формуючи механічну «латку» дефекту і виступаючи в якості плато для утворення міцного фіброзного рубця. Даний спосіб не вимагає значних фінансових витрат, особливих навичок хірурга і показав переважні результати гісто-морфологічних досліджень на лабораторних тваринах.

**Мета роботи:** оцінка ефективності використання поліпропіленової сітки для закриття дефекту капсули кульшового суглоба на підставі аналізу напружено-деформованого стану моделей ушивання капсули різними способами.

**Матеріали та методи.** Дослідження виконувалось в програмному комплексі, заснованому на методі скінчених елементів. Для раціонального використання ресурсів ЕОМ була побудована розрахункова модель, яка складалася лише з моделі капсули і моделі головки ендопротеза. Кістки, які формують кульшовий суглоб, не моделювалися, а їх наявність враховувалося шляхом накладання відповідних граничних умов: заборонялися переміщення країв капсули у всіх напрямках.

Модель капсули за своїми розмірами відповідала анатомічним розмірам капсули дорослої людини. З огляду на те, що форма капсули повторює контури головки і шийки стегнової кістки і має форму циліндричного рукава, прикріплюючись до країв кульшової западини таза і міжвертельної лінії (рис. 2,(а)), вона моделювалася у вигляді порожнього циліндра з розмірами: довжина 12 см, товщина стінки 3 мм (рис. 2,(б)) [7].

Відносно діаметра циліндра необхідно відзначити наступне. З огляду на те, що під час рухів поверхня головки ендопротеза впливає на капсулу, то для дотримання умов взаємодії між цими елементами, діаметр головки і внутрішній діаметр циліндра мали однаковий розмір, який становив 36 мм [8]. З урахуванням зазначеної товщини стінки капсули, зовнішній діаметр циліндра дорівнював 42 мм. Для зменшення кількості скінчених елементів моделі розглядалася тільки 1/2 циліндра (рис. 2,(в)).

Відносно моделі головки зауважимо, що жорсткість її багато вище, ніж у капсули. Крім того, ендопротез не є безпосередньо досліджуваним об'єктом. Тому з метою зниження загальної кількості скінчених елементів в моделі, головка ендопротеза кульшового суглоба моделювалася у вигляді порожньої кулі, зовнішній діаметр якої, як вказувалося вище, мав розмір 36 мм, а внутрішній – 34 мм, тобто товщина головки складала 1 мм (рис. 3).

Для прикладання навантаження до голівки ендопротеза, яка і передається на капсулу, до кулі прикріплений прямокутний елемент, який мав розміри поперечного перерізу 1x1 см.

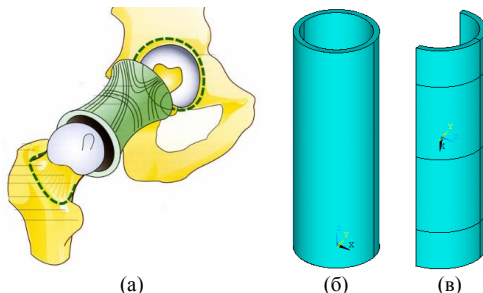


Рис. 2. Схема капсули кульшового суглоба (а); (б), (в) елемент «капсула» комп'ютерної моделі системи «капсула-головка ендопротеза кульшового суглоба»

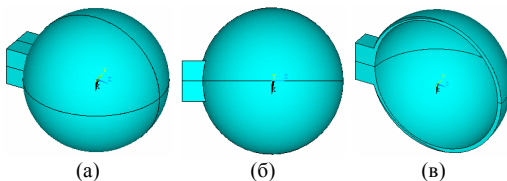


Рис. 3. Модель головки ендопротеза кульшового суглоба: (а) загальний вигляд, (б) вид збоку, (в) вид в розрізі

Взаємодія між кулею і внутрішньою поверхнею циліндра здійснювалося шляхом створення контактної пари засобами програмного комплексу.

Зауважимо, що в даній роботі досліджувався два способи ушивання капсули: вузловими швами, а також поліпропіленовою сіткою, яка закривала дефект капсули і фіксувалася до неї по всьому периметру сітки, через всю товщу капсульно-зв'язкового апарату за допомогою нитки «Вікріл». Таким чином, були побудовані дві розрахункові моделі, які мали однакову геометрію, але відрізнялися тільки способом закриття розсіченої капсули. Крім того, побудована додаткова контрольна модель тих же розмірів, але в якій розріз не вшивався.

Капсулотомія моделювалася у вигляді розсічення нульової товщини, уздовж твірної циліндра, тобто вздовж моделі капсули. Довжина розтину – 8 см. Розташовувався розріз симетрично по висоті циліндра, тому відступи від верхньої і нижньої основи моделі склали по 2 см.

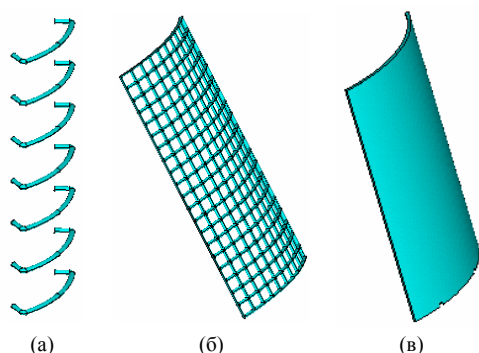


Рис. 4. (а) елемент «вузловий шов», (б)-(в) елемент «пропіленова сітка» комп'ютерної моделі системи «капсула-головка ендопротеза кульшового суглоба»

Фіксуючі елементи (нитка і сітка) також моделювалися відповідно до своїх реальних розмірів (рис. 4, (а), (б)). Діаметр нитки – 0.5 мм, діаметр нитки в сітці – 0.5 мм, розмір комірок – 2x2 мм.

Фізико-механічні властивості елементів моделі задавалися такими. Для капсульно-зв'язкового апарату модуль пружності Юнга – 150 МПа, коефіцієнт Пуассона – 0.25. Властивості головки

ендопротеза були обрані з міркувань високої жорсткості в порівнянні з жорсткістю капсули і склали  $2 \cdot 10^5$  МПа і 0.25, відповідно. Для нитки і сітки пружні властивості передбачалися однаковими і відповідали: модуль Юнга – 17.2 МПа, коефіцієнт Пуассона 0.25. Однак, тут слід зазначити наступне. Попередній розрахунок показав, що моделювання сітки з її реальними розмірами (коміркова структура) створює велику кількість додаткових елементів в моделі (лінії і поверхні), яким присвоюється нумерація. Це в свою чергу, призводить до суттєвого споживання ресурсів комп'ютера. Тому модель сітки була замінена на фрагмент циліндричної поверхні (рис. 4, (в)), габаритні розміри якої відповідали сітці, а товщина збігалася з діаметром нитки. Зазначена заміна потребувала перерахунку пружного модуля, який склав 1.72 МПа. Зауважимо, що моделювання сітки у вигляді суцільної поверхні є правомірним, так як відмінність у будові зазначених об'єктів існує тільки на мікрорівні (наявність або відсутність комірок). На макрорівні, за рахунок визначення нового модуля

пружності для суцільної поверхні, відмінності в поведінці моделей сітки (коміркова або суцільна структура), при її навантаженні, не буде. Отже, вплив на капсулу з боку моделі сітки у вигляді суцільної поверхні буде таким же як і при моделюванні її комірковою структурою.

Ушивання дефекту моделювалося накладенням швів і сітки. Шви накладалися з кроком 1 см з відступом від країв розрізу по 1 см, тому загальна кількість швів склала 7 штук (рис. 5, (б)). Відступи від осі розрізу також складали по 1 см. Сітка накладалася за розмірами розсічення, тобто 8 см – уздовж лінії розрізу, і з відступами по 2.5 см – від його осі (рис. 5, (в)). З'єднання сітки і поверхні капсули здійснювалося циліндричними елементами, які моделювали пришивання. Розміри і властивості циліндричних елементів відповідали розмірам і властивостям нитки, якою здійснюється пришивання сітки до капсули, а розташовувалися вони з кроком 1 см по периметру сітки.

Взаємодія фіксуючих елементів і капсули здійснювалося також шляхом створення контактної пари.

Для дослідження ефективності ушивання розсічення різними способами до прямокутного елемента моделі головки прикладалася статичне навантаження – у вигляді фіксованої величини сили. Вектор прикладання навантаження був спрямований по нормалі до лінії розсічення (до твірної циліндра). З огляду на те, що найбільш небезпечною є дія навантаження на центр розрізу, то дослідження виконувалося в припущенні, що головка розташовується симетрично по відношенню до лінії розрізу, як по довжині, так і щодо осі.

Величина статичної сили становила 15 кг. Зауважимо, що так як при всіх однакових умовах відмінність між моделями полягає лише в способах фіксації, то для порівняння їх ефективності, величини навантажень можуть бути обрані довільно.

Модель капсули закріплювалася по всій площині верхньої і нижньої основи: заборонялися переміщення у всіх напрямках, що імітувало приєднання капсули до кісткової поверхні. Крім того, до граней, розташованих з боку відкинутої частини циліндра, накладалися відповідні граничні умови, які забезпечували нерухомість зазначених граней моделі в напрямку вектора навантаження.

Розподіл на скінчені елементи здійснювалося генератором сіток програмного комплексу. Тип елемента обраний SOLID. Розмір скінченного елемента задавався на лініях об'єктів і змінювався від 0.25 до 1.0 мм. Створена контактна пара «капсула-головка ендопротеза кульшового суглоба» передбачала відсутність тертя.

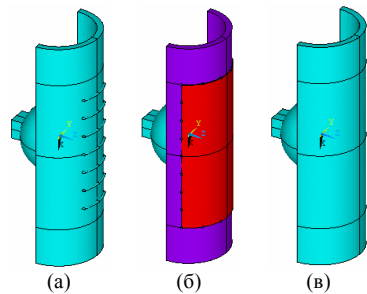


Рис. 5. Комп'ютерна модель системи «капсула-головка ендопротеза кульшового суглоба»: (а) із закриттям дефекту капсули вузловим швом, (б) з закриттям дефекту капсули пропіленою сіткою, (в) без закриття дефекту

**Результати та їх обговорення.** В результаті виконаних розрахунків отримані картини розподілу напружено-деформованого стану в системі «голівка-капсула». Для оцінки ефективності способу закриття капсули, в якості основних характеристик, обрані величини розкриття розрізу, а також напруження, що виникають в капсулі суглоба. Додатковою характеристикою обрані напруження в голівці. Отримані результати наведені у відповідних таблицях 1 і 2.

Зауважимо, що в даній роботі виконувався статичний розрахунок, тобто фіксувалася величина прикладеного навантаження. Очевидно, що при фіксованій величині сили у моделей з різною жорсткістю переміщення будуть також різними – чим жорсткіше модель, тим менше переміщення. Тому основним показником такого дослідження є величина розкриття розрізу, а напруження в моделі можна використовувати для додаткової оцінки міцності.

Таблиця 1

Величини переміщень і напружень в системі  
«капсула-голівка ендопротеза кульшового суглоба»

Спосіб фіксації	Переміщення в капсулі $\delta$ , мм			Напруження $\sigma_{\text{Міз}}$ , МПа		Переміщення голівки $w$ , мм
	$\delta_{\text{max}}$	$\delta_{\text{вн}}$	$\delta_{\text{сн}}$	Капсула	Голівка	
Модель без закриття капсулою (контрольна модель)	3.42	2.87	3.42	10.5	13.6	3.90
Модель системи з закриттям дефекта вузловими швами	1.68	1.43	1.60	8.12	13.8	2.06
Модель системи з закриттям дефекта пропіленою сіткою	1.01	0.86	0.99	7.59	13.5	1.38

Як видно з таблиці 1 значення переміщень на краях розрізу всередині і зовні капсули відрізняються. Причому величина переміщення зовні більше ніж на внутрішній поверхні, тобто відбувається розворот країв розрізу. Картина розвороту показана на рис. 6.

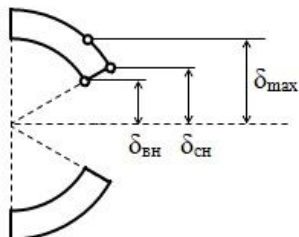


Рис. 6. Розташування точок капсули з найбільшими переміщеннями

Аналіз результатів, наведених у таблиці 1 показав. Найменші переміщення в напрямку розкриття отримані у моделі фіксації розрізу сіткою і склали – 1.01 мм. При фіксації розрізу ниткою ця величина була – 1.68 мм, що виявилось вище на 0.67 мм або 66.3%. Найбільші переміщення отримані у контрольній моделі (без фіксації), які дорівнювали 3.42 мм, і були

більше ніж у моделей з фіксацією нитками і сіткою на 1.74 мм або 103.6%, і 2.41 мм або 238.6%, відповідно.

З огляду на те, що величина  $\delta$  – це відхилення точок капсули від осі розрізу, то відповідно  $\Delta$  – повне розкриття, визначається зі співвідношення  $\Delta = 2*\delta$ , а його величини наведені в таблиці 2.

Таблиця 2

Величини розкриття розрізу в залежності від моделі фіксації

Спосіб фіксації	Переміщення, мм		
	$\Delta_{\max}$	$\Delta_{\text{вн}}$	$\Delta_{\text{сн}}$
Модель без закриття капсулотомії (контрольна модель)	6.84	5.74	6.84
Модель системи з закриттям дефекта вузловими швами	3.36	2.86	3.20
Модель системи з закриттям дефекта пропіленовою сіткою	2.02	1.72	1.98

Відносно величин розкриття можна помітити, що у моделі фіксації сіткою воно виявилось також найменшим як на внутрішній, так і на зовнішній стороні. При цьому різниця в цих величинах дорівнює 0.26 мм. У моделі фіксації ниткою розкриття було вище на 66.3% з внутрішньої сторони і на 61.6% з зовнішньої сторони, а різниця – 0.34 мм. У контрольній моделі величини розкриття були найбільшими і перевищували ці показники на 233.7% з внутрішньої і на 245.5% з зовнішньої сторони для моделі з сіткою, і для моделі з ниткою на 100.7% і 113.8%, відповідно. Різниця в розкриттях для контрольної моделі – 1.10 мм.

На рисунку 7 показані картини розподілу переміщень в окружному напрямку для різних моделей. Для оцінки величин деформації моделей картини показані в однаковому масштабі. Як видно з рисунку найменше розкриття отримано у моделі фіксації сіткою (рис. 7,(а)), при фіксації ниткою – середнє (рис. 7, (б)), а найбільше отримано у моделі без фіксації (рис. 7, (в)).

Для оцінки напруженого стану обрані величини еквівалентних по Мизесу напружень як в капсулі, так і в голівці.

З таблиці 1 видно, що найбільші напруження в капсулі виникають в моделі без фіксації, які за величиною дорівнювали 10.5

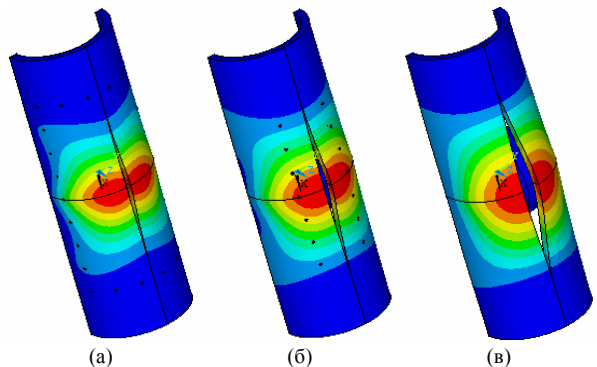


Рис. 7. Розподіл переміщень в капсулі для різних моделей

МПа. При фіксації ниткою ці напруження були на 22.7% менше і склали 8.12 МПа. Найменші напруження виникли в моделі фіксації сіткою (7.59 МПа) і були меншими на 27.7% ніж у контрольній моделі, і на 6.53% ніж у моделі з ниткою. Виникали ці напруження у всіх моделях в точці контакту головки і капсули, тобто в центрі розрізу (рис. 8, (а)).

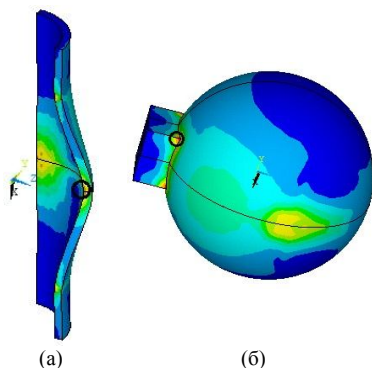


Рис. 8. Розподіл еквівалентних по Мизесу напружень в капсулі (а) і в голівці (б)

Максимальні напруження в голівці за величиною практично не відрізнялися для різних моделей фіксації. Найбільші з цих напружень досягалися у моделі з ниткою і склали 13.8 МПа. У моделі без фіксації напруження були менше на 1.45%. А найменші отримані у моделі з сіткою, які були менше ніж у моделей з фіксацією ниткою і контрольної на 2.17% і 0.74%, відповідно. Виникали зазначені напруження в точці з'єднання кулі головки з параллелепипедом (рис. 8, (б)), тобто в концентраторі напружень, чим і пояснюється їх величина.

Тут необхідно зазначити, що при статичному розрахунку крім розглянутих величин деформацій і напружень, і використовуваних для оцінки ефективності способу закриття капсули, важливими також є величини переміщень головки в напрямку прикладеного навантаження. Це пояснюється тим, що при прикладанні фіксованою сили до голівки, переміщення в моделі не контролюються, а є результатом. Тому показником жорсткості будуть не тільки величини розкриття, а й величина переміщення головки в напрямку розрізу ( $w$  – переміщення в напрямку прикладеного навантаження).

З таблиці 1 видно, що найменшими ці переміщення виявилися у моделі фіксації сіткою, які дорівнювали 1.38 мм. У моделі фіксації ниткою ця величина дорівнювала 2.06 мм, що більше на 49,3%. Найбільші переміщення головки отримані у моделі без фіксації, які дорівнювали 3.90 мм, які були більше ніж у моделі з сіткою на 182,6% і на 89.3% ніж у моделі з ниткою, відповідно.

Як зазначалося вище, при статичному розрахунку розподіл переміщень вказує на характеристики жорсткості розглянутих моделей. Чим нижче переміщення при однакових умовах навантаження, тим жорсткішою є модель. Отримані переміщення показують, що з точки зору жорсткості фіксації більш жорсткою є модель з сіткою. Крім того, величини отриманих напружень в капсулі вказують на те, що з точки зору міцності модель з сіткою є також і більш міцною.

## Висновки

1. Найменші величини розкриття розрізу отримані у моделі фіксації його сіткою.



2. З усіх моделей фіксації, напруження в капсулі виявилися найменшими у моделі закриття дефекту капсули сіткою, а ці ж напруження в голівці незначно відрізнялися за величиною для різних моделей.

3. Переміщення голівки в напрямку прикладеного навантаження, також виявилися найменшими у моделі закриття дефекту капсули кульшового суглоба сіткою.

4. Отримані результати розрахунків вказують на те, що при розглянутих варіантах фіксації розрізу, як з точки зору жорсткості, так і міцності, ефективнішою є модель фіксації дефекту сіткою.

#### СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Sanchez-Sotelo J., Berry D.J.* Epidemiology of instability after total hip replacement. *Orthop Clin North Am.* 2001;32:543-52.
2. *Kwon M.S., Kuskowski M., Mulhall K.J., Macaulay W., Brown T.E., Saleh K.J.* Does surgical approach affect total hip arthroplasty dislocation rates? *Clin Orthop Relat Res.* 2006; 447(447):34-38.
3. *Browne J.A., Pagnano M.W.* Surgical technique: a simple softtissue-only repair of the capsule and external rotators in posterior-approach THA. *Clin Orthop Relat Res.* 2012; 470(2): 511-515.
4. *Singh B., Brown T.D., Callaghan J.J., Yack H.J.* Abdomen-thigh contact forces during functional reaching tasks in obese individuals. The 34th Annual Meeting of the American Society of Biomechanics, Providence, RI. August 18-21 2010.
5. *Kim Y.S., Kwon S.Y., Sun D.H., Han S.K., Maloney W.J.* Modified posterior approach to total hip arthroplasty to enhance joint stability. *ClinOrthopRelatRes* 2008.
6. *Yamaguchi T., Naito M., Asayama I., Kambe T., Fujisawa M., Ishiko T.* The effect of posterolateral reconstruction on range of motion and muscle strength in total hip arthroplasty. *J Arthroplasty* 2003
7. *Менщикова Т.И., Чегуров О.К., Менщиков И.Н.* Использование метода узи для оценки структурного состояния тазобедренного сустава у больных с различными стадиями коксартроза // Международный журнал прикладных и фундаментальных исследований. – 2017. – № 1-1. – С. 42-46.
8. *Georgios Tsikandylakis, Maziar Mohaddes, Peter Cnudde, Antti Eskelinen, Johan Kärrholm, Ola Rolfson* Head size in primary total hip arthroplasty *EFORT Open Reviews* Volume 3, Issue 5, 2018: P. 73-79.
9. *Чижов Дмитрий Всеволодович.* Полипропиленовые материалы в хирургии грыж брюшной стенки (экспериментально-клиническое исследование): диссертация на соискание ученой степени доктора медицинских наук; Москва, 2016
10. *Pranav Rathi, Gavin C. Pereira, Mauro Giordani, Paul E. Di Cesare.* The Pros and Cons of Using Larger Femoral Heads in Total Hip Arthroplasty. *The American Journal of Orthopedics.* 2013; 53-59

#### REFERENCES

1. *Sanchez-Sotelo J., Berry D.J.* Epidemiology of instability after total hip replacement. *Orthop Clin North Am.* 2001; 32: 543-52.
2. *Kwon M.S., Kuskowski M., Mulhall K.J., Macaulay W., Brown T.E., Saleh K.J.* Does surgical approach affect total hip arthroplasty dislocation rates? *Clin Orthop Relat Res.* 2006; 447 (447): 34-38.
3. *Browne J.A., Pagnano M.W.* Surgical technique: a simple softtissue-only repair of the capsule and external rotators in posterior-approach THA. *Clin Orthop Relat Res.* 2012; 470 (2): 511-515.
4. *Singh B., Brown T.D., Callaghan J.J., Yack H.J.* Abdomen-thigh contact forces. The 34th Annual Meeting of the American Society of Biomechanics, Providence, RI. August 18-21.

5. Kim Y.S., Kwon S.Y., Sun D.H., Han S.K., Maloney W.J. Modified posterior approach to total joint stability. ClinOrthopRelatRes 2008.
6. Yamaguchi T., Naito M., Asayama I., Kambe T., Fujisawa M., Ishiko T. The effect of posterolateral reconstruction on the range of motion and muscle strength in total hip arthroplasty. J Arthroplasty 2003
7. Menshikova T.I., Chegurov O.K., Menshikov I.N. Ispol'zovaniye metoda uzi dlya otsenki strukturnogo sostoyaniya tazobedrennogo sustava u bol'nykh s razlichnymi stadiyami koksartroza (The use of the ultrasound method for assessing the structural condition of the hip joint in patients with different stages of coxarthrosis) // International Journal of Applied and Fundamental Research. - 2017. - No. 1-1. - P. 42-46.
8. Georgios Tsikandylakis, Maziar Mohaddes, Peter Cnudde, Antti Eskelinen, Johan Kärrholm, Ola Rolfson EFORT Open Reviews Volumes 3, Issue 5, 2018: P. 73-79.
9. Chizhov Dmitry Vsevolodovich. Polipropilenovyye materialy v khirurgii gryzh bryushnoy stenki (eksperimental'no-klinicheskoye issledovaniye): dissertatsiya na soiskaniye uchenoy stepeni doktora meditsinskikh nauk (Polypropylene materials in surgery of hernia of the abdominal wall (experimental and clinical study): dissertation for the degree of Doctor of Medical Sciences); Moscow, 2016
10. Pranav Rathi, Gavin C. Pereira, Mauro Giordani, Paul E. Di Cesare. The Pros and Cons of Using Larger Femoral Heads in Total Hip Arthroplasty. The American Journal of Orthopedics. 2013; 53-59

*Стаття надійшла до редакції 03.07.2019 р.*

*Панченко С.П., Масленніков С.О., Головаха М.Л.*

### **ОЦІНКА ЕФЕКТИВНОСТІ ФІКСАЦІЇ РОЗРІЗУ КАПСУЛИ КУЛЬШОВОГО СУГЛОБА ПОЛІПРОПІЛЕНОВОЮ СІТКОЮ**

**Актуальність.** Вивих стегнового компонента ендопротеза є одним з найбільш частих ускладнень при тотальному ендопротезуванні кульшового суглоба (ТЕКС). Розрізняють безліч чинників розвитку вивихів. Кращим варіантом «лікування» вивиху при ТЕКС є запобігання розвитку первинної нестабільності. Особливо актуальним питанням відновлення капсульно-зв'язкового апарату є для людей з ожирінням. Ретельне відновлення структур м'яких тканин або збереження цих структур за допомогою модифікованих доступів значно скорочує частоту виникнення вивихів. В даний час розроблено безліч способів зміцнення та відновлення задніх структур капсули кульшового суглоба. У даній роботі досліджується спосіб відновлення і зміцнення задніх структур капсули кульшового суглоба за допомогою сітчастих імплантатів на основі поліпропілену. **Мета роботи:** оцінка ефективності використання поліпропіленової сітки для закриття дефекту капсули кульшового суглоба. **Матеріали та методи.** Дослідження виконувалось в програмному комплексі, заснованому на методі скінчених елементів. Для раціонального використання ресурсів ЕОМ була побудована розрахункова модель, яка складалася лише з моделі капсули і моделі головки ендопротеза. Розміри елементів розрахункової моделі відповідали дійсним розмірам цих об'єктів. У роботі досліджувалося два способи ушивання капсули: вузловими швами і поліпропіленовою сіткою. Також, побудована додаткова контрольна модель тих же розмірів, але в якій розріз не вшивався. **Результати та їх обговорення.** В результаті виконаних розрахунків отримані картини розподілу напружено-деформованого стану в системі «головка-капсула». Для оцінки ефективності способу закриття капсули, в якості основних характеристик, обрані величини розкриття розрізу, а також напруження, що виникають в капсулі суглоба. Додатковою характеристикою обрані напруження в голівці. **Висновки.** Отримані результати розрахунків вказують на те, що при розглянутих варіантах фіксації розрізу, як з точки зору жорсткості, так і міцності, ефективнішою є модель фіксації дефекту сіткою.

**Ключові слова:** капсула, кульшовий суглоб, ендопротез, напружено-деформований стан, модель, метод скінчених елементів.

*Panchenko S.P., Maslennikov S.O., Golovakha M.L.*

## **ESTIMATION OF EFFICIENCY OF HIP JOINT CAPSULE CUT FIXATION WITH POLYPROPYLENE MESH**

**Relevance.** Dislocation of the femoral component of the endoprosthesis is one of the most frequent complications in the total hip joint endoprosthesis (THJE). There are many factors for the development of dislocations. The best option to «treatment» a dislocation in THJE is to prevent the development of primary instability. Of particular relevance to the restoration of the capsule-ligament apparatus is for people with obesity. Careful restoration of soft tissue structures or the preservation of these structures using modified accesses significantly reduces the incidence of dislocations. Currently developed many ways to strengthen and restore the posterior structures of the hip joint capsule. In this paper, we study a method for restoring and strengthening the posterior structures of the hip joint capsule using polypropylene-based mesh implants. **Purpose:** to evaluate the effectiveness of using a polypropylene mesh to close a defect in the hip joint capsule. **Materials and methods.** The study was carried out in a software package based on the finite element method. For the rational use of computer resources, a computational model was built, which consisted only of the capsule model and the endoprosthesis head model. The dimensions of the elements of the computational model corresponded to the actual dimensions of these objects. In this paper, two ways of capsule suturing were investigated: interrupted sutures and polypropylene mesh. Also, an additional control model of the same dimensions was constructed, but in which the incision was not sutured. **Results and its discussion.** As a result of the calculations, pictures of the distribution of the stress-strain state in the «head-capsule» system were obtained. To assess the effectiveness of the method of closing the capsule, as the main characteristics, the values of the opening of the incision, as well as the stresses arising in the joint capsule, were chosen. An additional characteristic is selected stresses in the head. **Conclusions.** The obtained calculation results indicate that with the considered options for fixing the cut, both in terms of rigidity and strength, the model of fixing the defect with a mesh is more effective.

**Keywords:** capsule; hip joint; endoprosthesis; stress-strain state; model; finite element method.

*Панченко С.П., Масленников С.О., Головаха М.Л.*

## **ОЦЕНКА ЭФФЕКТИВНОСТИ ФИКСАЦИИ РАЗРЕЗА КАПСУЛЫ ТАЗОБЕДРЕННОГО СУСТАВА ПОЛИПРОПИЛЕНОВОЙ СЕТКОЙ**

**Актуальность.** Вывих бедренного компонента эндопротеза является одним из самых частых осложнений при тотальном эндопротезировании тазобедренного сустава (ТЭТС). Различают множество факторов развития вывихов. Лучшим вариантом «лечения» вывиха при ТЭТС является предотвращение развития первичной нестабильности. Особо актуальным вопрос восстановления капсульно-связочного аппарата является для людей с ожирением. Тщательное восстановление структур мягких тканей или сохранение этих структур при помощи модифицированных доступов значительно сокращает частоту возникновения вывихов. В настоящее время разработано множество способов укрепления и восстановления задних структур капсулы тазобедренного сустава. В данной работе исследуется способ восстановления и укрепления задних структур капсулы тазобедренного сустава при помощи сетчатых имплантатов на основе полипропилена. **Цель работы:** оценка эффективности использования полипропиленовой сетки для закрытия дефекта капсулы тазобедренного сустава. **Материалы и методы.** Исследование выполнялось в программном комплексе, основанном на методе конечных элементов. Для рационального использования ресурсов ЭВМ была построена расчетная модель, которая состояла только из модели капсулы и модели головки эндопротеза. Размеры элементов расчетной модели соответствовали действительным размерам этих объектов. В работе исследовалось два способа ушивания капсулы: узловыми швами и полипропиленовой сеткой. Также, построена дополнительная контрольная модель тех же размеров, но в которой разрез не ушивался. **Результаты и их обсуждение.** В результате выполненных расчетов получены картины распределения напряженно-деформированного состояния в системе «головка-капсула». Для оценки эффективности способа закрытия капсулы, в качестве основных характеристик, выбраны величины раскрытия разреза, а также напряжения, возникающие в капсуле сустава. Дополнительной характеристикой выбраны напряжения в головке. **Выводы.** Полученные результаты расчетов указывают на то, что при рассмотренных вариантах фиксации разреза, как с точки зрения жесткости, так и прочности, более эффективной является модель фиксации дефекта сеткой.

**Ключевые слова:** капсула, тазобедренный сустав, эндопротез, напряженно-деформированное состояние, модель, метод конечных элементов.

УДК: [539.4:678.742.3]:616.728.2-089.168

*Панченко С.П., Масленников С.О., Головаха М.Л. Оцінка ефективності фіксації розрізу капсули кульшового суглоба поліпропіленовою сіткою // Опір матеріалів і теорія споруд: наук.-тех. збірн. – К.: КНУБА, 2019. – Вип. 103. – С. 177-188.*

*Виконується оцінка ефективності закриття дефекту капсули кульшового суглоба поліпропіленовою сіткою на підставі аналізу напружено-деформованого стану моделей фіксації розрізу системи «капсула-головка ендопротеза».*

Табл. 2. Іл. 8. Бібліогр. 10 назв.

UDC: [539.4:678.742.3]:616.728.2-089.168

*Panchenko S.P., Maslennikov S.O., Golovakha M.L. Estimation of efficiency of hip joint capsule cut fixation with polypropylene mesh // Strength of Materials and Theory of Structures: Scientific-&-Technical collected articles – Kyiv: KNUBA, 2019. – Issue 103. – P. 177-188. – Ukr*

*The effectiveness of the closure of the hip joint capsule defect is assessed with a polypropylene mesh based on the analysis of the stress-strain state of the models for fixing the incision of the capsule-head endoprosthesis system.*

Tabl. 2. Fig. 8. Ref. 10.

УДК: [539.4:678.742.3]:616.728.2-089.168

*Панченко С.П., Масленников С.О., Головаха М.Л. Оценка эффективности фиксации разреза капсулы тазобедренного сустава полипропиленовой сеткой // Сопротивление материалов и теория сооружений: науч.-тех. сборн. – К.: КНУСА, 2019. – Вип. 103. – С. 177-188. – Укр.*

*Выполняется оценка эффективности закрытия дефекта капсулы тазобедренного сустава полипропиленовой сеткой на основании анализа напряженно-деформированного состояния моделей фиксации разреза системы «капсула-головка эндопротеза».*

Табл. 2. Ил. 8. Библиогр. 10 назв.

**Автор:** Кандидат технічних наук, доцент, доцент кафедри будівельної механіки та опору матеріалів Панченко Сергій Павлович

**Адреса:** 49000, Україна, м. Дніпро, вул. Чернишевського 24а, ДВНЗ «Придніпровська державна академія будівництва та архітектури»

**Робочий телефон:** +38-056-756-34-22

**Мобільний телефон:** +38-095-816-99-41

**Імейл:** panchenko.serhii@pgasa.dp.ua

**ORCID ID:** <https://orcid.org/0000-0001-5826-3645>

**Автор:** Асистент кафедри травматології та ортопедії Масленников Сергій Олегович

**Адреса:** 69035, Україна, м. Запоріжжя, проспект Маяковського, 26, Запорізький державний медичний університет

**Мобільний телефон:** +38-093-304-78-38

**Імейл:** [travmatology1@i.ua](mailto:travmatology1@i.ua)

**Автор:** Доктор медичних наук, професор, зав. кафедри травматології та ортопедії

Головаха Максим Леонідович

**Адреса:** 69035, Україна, м. Запоріжжя, проспект Маяковського, 26, Запорізький державний медичний університет

**Мобільний телефон:** +38-067-563-01-17

**Імейл:** [golovaha@ukr.net](mailto:golovaha@ukr.net)

УДК 624.014.2:624.073.327

## ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНІ ДОСЛІДЖЕННЯ ПРОЛЬОТНИХ КОНСТРУКЦІЙ З ПЕРФОРОВАНИХ ЕЛЕМЕНТІВ ЗА СКЛАДНОГО НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНОГО СТАНУ

**В.В. Романюк,**  
канд. техн. наук

**В.В. Супрунюк,**  
канд. техн. наук

*Національний університет водного господарства та природокористування*

DOI: 10.32347/2410-2547.2019.103.189-200

Сформульовано мету та задачі експериментальних досліджень сталеві попередньо напруженої арки з перфорованим верхнім поясом та перфорованого прогону Z-подібного профілю, які полягають у встановленні дійсного напружено-деформованого стану конструкцій за різних їх конструктивних особливостей та за різних схем прикладання навантаження у характерних перерізах на різних розрахункових ділянках. Наведено опис двошарнірної сталеві арки з перфорованим верхнім поясом і попередньо напруженою розпіркою, перфорованого Z-подібного прогону, а також експериментальних установок, які дозволяють закріпити конструкції та завантажити їх відповідно до реальних умов експлуатації. Представлено перелік приладів та обладнання, використаних під час експерименту.

Наведено основні висновки за результатами експериментальних досліджень та визначено, що перспективним напрямком подальших експериментальних і теоретичних досліджень є вивчення питання стійкості стінки та полиці прокатних профілів на різних розрахункових ділянках в перерізах з отворами різної конфігурації і в перерізах без отворів.

**Ключові слова:** арка, прогон, експеримент, установка, прилад, обладнання, несуча здатність, напружено-деформований стан.

**Вступ.** Експериментальні дослідження сталевих конструкцій і особливо такі, що виконані з використанням зразків у натуральну величину, дозволяють отримати реальний напружено-деформований стан не лише окремих елементів, а і конструкції в цілому на всьому проміжку її роботи від початку завантаження і аж до руйнування, що дає можливість враховувати під час розробки інженерної методики розрахунку численні фактори, які сприяють підвищенню точності розрахунків.

**Аналіз останніх досліджень і публікацій.** На теперішній час проведена велика кількість експериментальних досліджень перфорованих елементів, а також конструкцій на їх основі, але, на жаль, результати цих досліджень досить мало відображені в літературі, а іноді навіть протирічать одне одному і теоретичним передумовам самих авторів. До того ж експериментальні дослідження в основному проводились на моделях у вигляді згинальних однопрольотних балок з метою встановлення ступеня точності різних методик розрахунку. Дослідження натурних зразків конструкцій у сучасній практиці є рідкістю, а експерименти з комбінованими системами, до складу яких входять перфоровані елементи, в літературі не представлені, за виключенням деяких окремих випадків.

Враховуючи, що дійсний напружено-деформований стан конструкцій іноді має значне розходження з теоретичними розрахунками, виконаними для ідеалізованих схем, а також цінність результатів дійсної роботи реальних конструкцій, в межах проведених самостійних теоретичних досліджень виникла необхідність проведення і самостійних експериментальних досліджень натурних зразків попередньо напруженої арки з верхнім стиснуто-згинальним поясом у вигляді перфорованого двотаврова постійної по довжині жорсткості, а також перфорованого прогону Z-подібного профілю, який працює в умовах косоного згину.

**Визначення мети та завдання дослідження.** Основною метою експериментальних досліджень є встановлення дійсного напружено-деформованого стану елементів сталеві арки з перфорованим верхнім поясом за різних її конструктивних особливостей та за різних схем прикладання навантаження, а також перфорованого прогону Z-подібного профілю у характерних перерізах на різних розрахункових ділянках за різних кутів його нахилу та визначення величини несучої здатності запропонованих конструкцій.

Відповідно до зазначеної мети експериментальні дослідження мають такі задачі:

1) запроектувати та виготовити двошарнірну сталеву арку прольотом 9 м з перфорованим верхнім поясом і попередньо напруженою розпіркою і перфорований Z-подібний прогон прольотом 6 м;

2) розробити експериментальні установки для дослідження сталеві арки і перфорованого Z-подібного прогону за різних кутів нахилу конструкції, які дозволять закріпити конструкції та завантажити їх відповідно до реальних умов експлуатації;

3) встановити фактичні значення напружень і деформацій, які виникають в характерних перерізах елементів арки за різних схем її завантаження та конструктивних особливостей, і перфорованого прогону, які виникають за різних кутів нахилу конструкції;

4) встановити граничну несучу здатність, форму і характер руйнування конструкції арки з розпіркою за нульового значення ексцентриситету зміщення затяжки і з попереднім натягом розпірки та перфорованого Z-подібного прогону, виготовленого з прокатного швелера №22У/ДСТУ 3436–96, за раціонального кута його нахилу;

5) виконати порівняльний аналіз результатів експериментальних досліджень з результатами розрахунків, виконаними за розробленими методиками та теоретичними розрахунками в ПК „Ліра”.

Експериментальні дослідження проведені з дотриманням вимог [1].

**Основна частина дослідження.** Для реалізації зазначеної мети і задач досліджень у спеціалізованій науково-дослідній лабораторії кафедри промислового, цивільного будівництва та інженерних споруд Національного університету водного господарства та природокористування (НУВГП, м. Рівне) були запроектовані, виготовлені та випробувані конструкції експериментальних зразків арки прольотом 9 м зі стрілою підйому 2,25 м і прогону Z-подібного профілю довжиною 6 м (рис. 1) [2,3].

Дослідна конструкція арки складається з двох напівпоясів, які виготовлені з вихідного двотавра  $\text{I}12/\text{ГОСТ 8239-89}$ , в результаті перфорації якого висота перерізу поясу збільшилась на 22%; зтяжки, яка складається з двох стержнів діаметром 16 мм; розпірки, що запроєктована з двох кутиків  $\text{L} 63 \times 63 \times 6/\text{ДСТУ 2251-93}$ , складених тавром. Фасонки, фланці та опорні вузли арки виготовлені з універсальної широкоштабової сталі товщиною 10 мм за  $\text{ГОСТ 82-70}^*$  (рис. 1, (а), (в)).

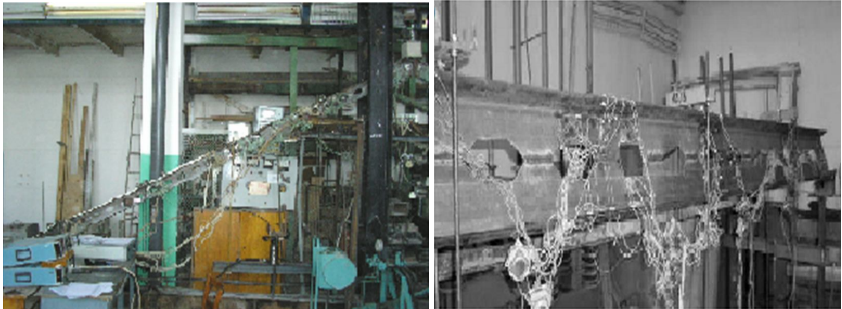
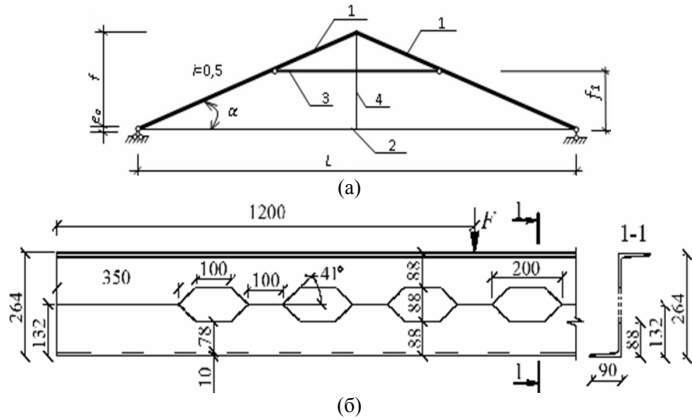


Рис. 1. Дослідні конструкції: (а) – загальна схема арки; (б) – загальна схема прогону; (в) – натурний зразок арки прольотом 9 м; (г) – натурний зразок прогону прольотом 6 м

Прогон виготовлений з прокатного швелера  $\text{I}22\text{У}/\text{ДСТУ 3436-96}$ , стінка якого була розрізана за зигзагоподібною лінією і в подальшому зварена зі зсувом і поворотом однієї половини швелера навколо своєї осі, що дозволило утворити перфорований прогон Z-подібного профілю (рис. 1, (б), (г)). Коефіцієнт розвитку висоти профілю склав 1.2.

Значення фактичних механічних характеристик сталі всіх профілів визначались шляхом випробування стандартних зразків у розривній машині „УММ-50”. Під час випробування розривною машиною було побудовано діаграми розтягу, які дозволили визначити механічні характеристики матеріалу.

В експериментальних дослідженнях використовувались стандартні прилади для статичних випробувань, а саме для вимірювання переміщень – прогиномири та індикатори годинникового типу, а для вимірювання деформацій волокон матеріалу – тензорезистори з базою 10 мм і 20 мм, які підключались електричними дротами до вимірювача деформацій „СИИТ-3”, який і фіксував покази датчиків (рис. 2). У свою чергу вимірювач деформацій передавав дані на комп’ютер через блок, який перетворює аналоговий сигнал у цифровий. На всіх елементах досліджуваної арки було встановлено 264 тензорезистора, а на прогоні 128 датчиків, розміщених у 13 характерних перерізах по його довжині (рис. 3, 4, 5).



Рис. 2. Апаратура для вимірювання деформацій

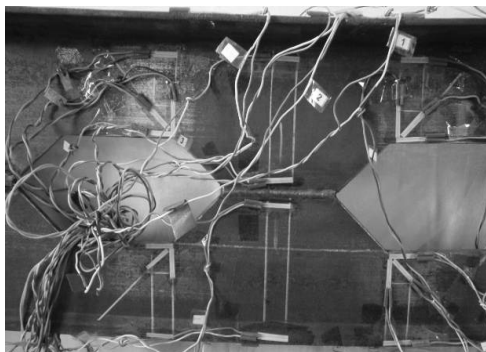


Рис. 3. Розміщення датчиків в перерізі з отворами

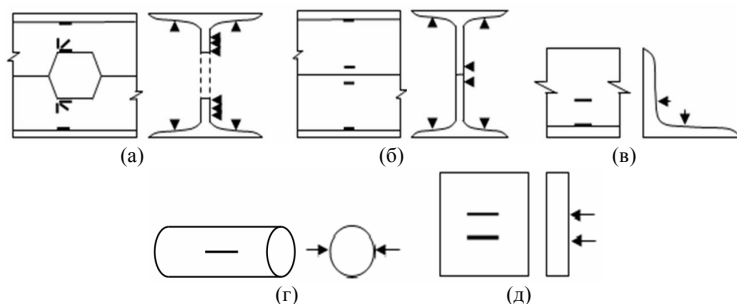


Рис. 4. Схеми розміщення тензорезисторів на елементах арки:

(а) – в перерізі перфорованого двотавра з отвором; (б) – в перерізі перфорованого двотавра без отвору; (в) – на кутику розрізки; (г) – на арматурі затяжки; (д) – на листових елементах

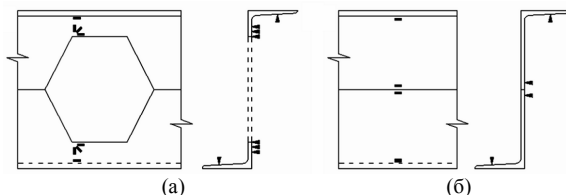


Рис. 5. Схема розміщення тензорезисторів у перерізах перфорованого Z-подібного профілю (а) – в перерізі з отвором; (б) – в перерізі без отвору

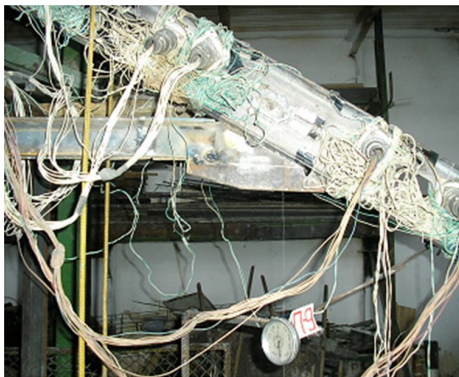


Напруження в поясах арки визначались у всіх перерізах з отворами, які знаходяться поблизу прикладання зовнішнього зосередженого навантаження, в перерізах поблизу гребеневого, опорних вузлів та вузлів з'єднання розпірки з поясом, а також в перерізах посередині ділянки поясу між опорним вузлом та найближчою зосередженою силою для встановлення точних значень напружень, які обчислюються за деформаційною розрахунковою схемою. В інших елементах, оскільки вони є однооснонапруженими, напруження визначались у напрямку дії внутрішнього зусилля.

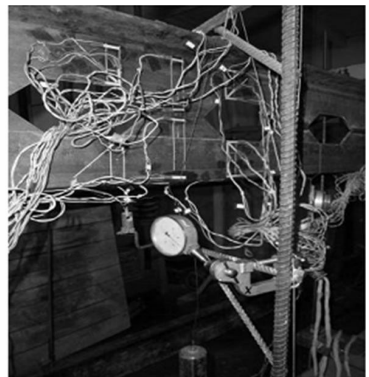
Нормальні напруження в перерізах перфорованого прогону Z-подібного перерізу вимірювались на чотирьох ділянках: 1) ділянка з максимальною поперечною силою і малим згинаючим моментом; 2) ділянка з середніми значеннями поперечної сили і згинаючого моменту; 3) ділянка з максимальним згинаючим моментом за відсутності поперечної сили; 4) приопорні ділянки. На кожній з трьох характерних ділянок (окрім приопорних) можна виділити два характерні перерізи, в яких і визначались напруження: переріз з отвором і переріз без отвору. Всі вони знаходяться поблизу точок прикладання зовнішнього зосередженого навантаження.

Деформації поясів арки вимірювались прогиномірами „6 ПАО-ЛИСИ” та „Максимова”, які мають ціну поділки 0,01 мм, у площині арки як у вертикальному, так і в горизонтальному напрямках (рис. 6, (а)). Прогноміри розміщувались у гребеневому вузлі, вузлах з'єднання розпірки з поясом, а також посередині ділянки поясу між опорним вузлом та вузлом з'єднання розпірки з поясом. На конструкції прогону прогноміри розміщувались в місцях найбільших імовірних деформацій, тобто посередині прольоту (рис. 6, (б)).

Для уточнення напрямку головних напружень у кутах отворів перфорованих профілів були влаштовані розетки з трьох тензодатчиків (див. рис. 3, 4, 5). Їх бази були орієнтовані згідно з напрямком деформацій у волокнах матеріалу.



(а)



(б)

Рис. 6. Розміщення прогномірів: (а) – на поясах арки; (б) – на прогоні

Для вивчення дійсної роботи розроблених конструкцій арки та прогону були запроєктовані та виготовлені спеціальні установки, які складаються з дослідної конструкції, системи закріплення дослідної конструкції в проектному положення, системи створення навантаження, системи передачі навантаження на конструкцію і системи контролю за станом дослідної конструкції (рис. 7, 8).

Випробування конструкції арки проводилось за трьома схемами завантаження, а саме: симетричній, несиметричній і монтажній. Симетрична схема завантаження моделювала реальне постійне навантаження на покрівлю, несиметрична – наявність снігового покриву тільки на половині прольоту, монтажна – у випадку влаштування покрівлі під час будівництва лише з одного боку. Крім того, для підтвердження доцільності застосування розробленої конструкції, проводились випробування арки за кожною зі схем завантаження за відсутності розпірки, з розпіркою, за різних значень ексцентриситету зміщення затяжки і з попереднім натягом розпірки, що дозволяла виконати дослідна конструкція.

Навантаження в процесі випробування прикладалось ступенями рівними 10% від максимального розрахункового навантаження, яке було попередньо обчислене теоретичними методами. Витримка після прикладання навантаження для з'ясування закономірностей приросту деформацій становила в межах 10...15 хвилин.

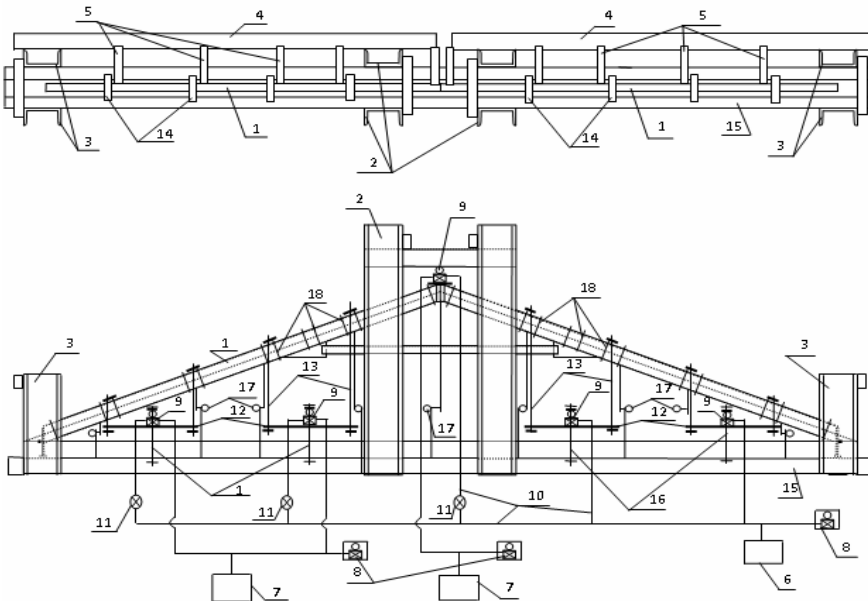


Рис. 7. Загальна схема експериментальної установки арки

1 – дослідна конструкція; 2 – центральний стіжок; 3 – опорний стіжок; 4 – в'язева балка; 5 – в'язеві елементи; 6 – основна маслостанція; 7 – допоміжні маслостанції; 8 – контрольні домкрати; 9 – основні домкрати; 10 – система маслопроводів; 11 – маслоперекачуючі вентиляції; 12 – траверси; 13 – тяги; 14 – опорні балочки; 15 – силова підлога; 16 – анкери; 17 – прогноміри; 18 – перерізи з тензорезисторами; 19 – індикатор годинникового типу; 20 – пружинний пристрій

Навантаження на дослідну конструкцію за кожною схемою навантаження доводилось до розрахункового значення, після чого скидалось до нуля. При цьому на кожному етапі знімались покази прогиномірів, індикаторів та тензотричної апаратури. Загалом було проведено 27 завантажень дослідної конструкції для різних схем його прикладання, та за різних конструктивних особливостей арки. На останньому симетричному завантаженні з попереднім натягом розпірки арку було доведено до руйнування з метою визначення руйнівного навантаження. Виходячи з теоретичних розрахунків, які згодом були підтверджені експериментально, встановлено, що дослідна конструкція арки з розпіркою здатна витримати навантаження на 30% більше ніж без розпірки.

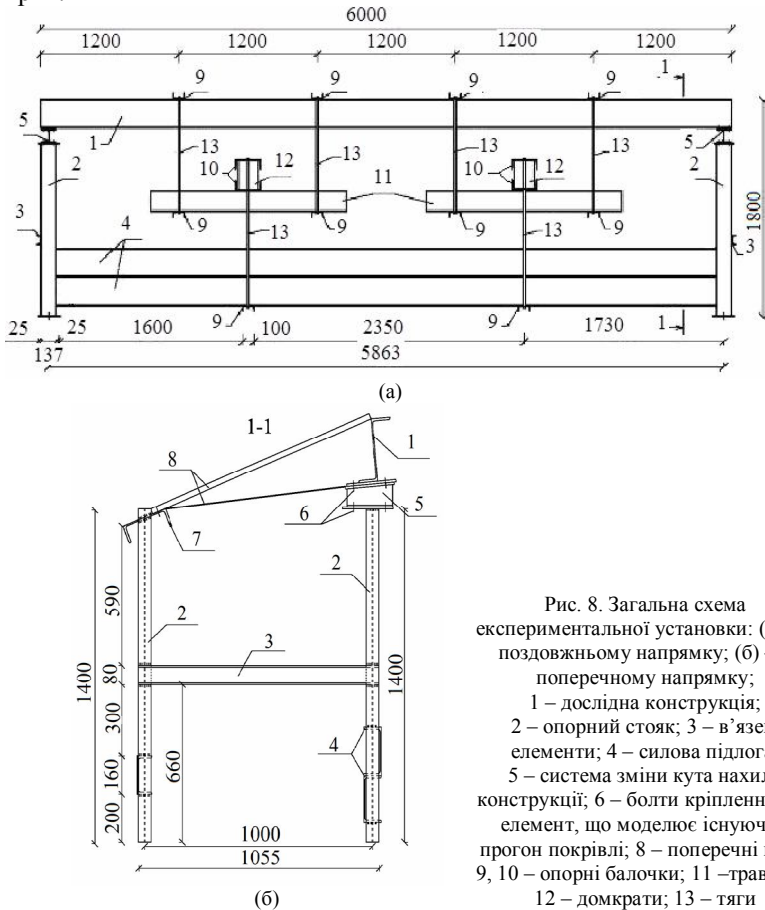


Рис. 8. Загальна схема експериментальної установки: (а) – у поздовжньому напрямку; (б) – у поперечному напрямку; 1 – дослідна конструкція; 2 – опорний стоек; 3 – в'язеві елементи; 4 – силова підлога; 5 – система зміни кута нахилу конструкції; 6 – болти кріплення; 7 – елемент, що моделює існуючий прогон покрівлі; 8 – поперечні в'язі; 9, 10 – опорні балочки; 11 – траверси; 12 – домкрати; 13 – тяги

Попередній натяг розпірки арки виконувався механічним способом за допомогою гайкового ключа, а його величина контролювалась за допомогою тензодатчиків і тензотричної апаратури.

Випробування конструкції прогону проводилося за симетричною схемою навантаження за дії чотирьох зосереджених сил, що моделювали рівномірно розподілене навантаження на покрівлю (див. рис. 8).

Систему зміни кута нахилу дослідної конструкції представлено у вигляді „башмаків”, які передають навантаження від дослідної конструкції на раму установки і забезпечують необхідний кут нахилу конструкції. Вони виготовлені з двох швелерів, стінки яких зрізані під певним кутом для забезпечення проектного положення конструкції. До полиці швелера приварено металеву пластину товщиною 10 мм. Для надійного кріплення конструкції до експериментальної установки в „башмаках” було виконано чотири отвори під болти діаметром 16 мм (рис. 9).

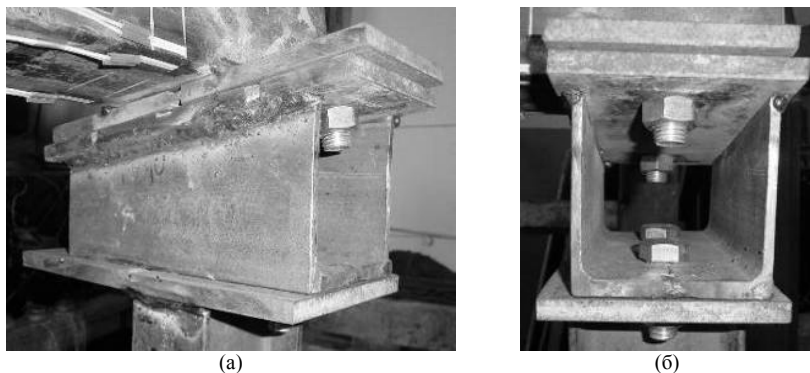


Рис. 9. Конструкція „башмаків” (а) – вигляд збоку; (б) – вигляд спереду

Розрахункове симетричне навантаження на перфорований прогон, яке залежить від кута нахилу конструкції, визначалося за граничними станами другої групи для вихідного прокатного швелера 22У/ДСТУ 3436–96 [4].

Для визначення руйнівного навантаження прогон було доведено до руйнування за кута нахилу конструкції  $15^\circ$ . Такий кут нахилу був прийнятий тому, що саме за такого його значення спостерігається найбільший збіг силової площини, тобто напрямку дії сили, з головною центральною віссю інерції перфорованого прогону Z-подібного профілю, виконаного з прокатного швелера 22У/ДСТУ 3436–96. Іншими словами, має місце найменше відхилення головної центральної осі інерції від силової площини, що забезпечує найбільшу несучу здатність конструкції, оскільки моменти інерції та опору матимуть у цьому випадку максимальні значення. Для інших вихідних профілів цей кут нахилу буде мати інші значення. Розрахунки виконані з дотриманням вимог [5].

### Висновки

1. Розроблено дослідні зразки попередньо напруженої арки прольотом 9 м з перфорованим верхнім поясом, перфорованого прогону Z-подібного профілю довжиною 6 м та експериментальні установки, які дозволили закріпити конструкції відповідно до їх розрахункових схем і прикласти до них навантаження за різними реально можливими схемами завантаження.

2. Проведено експериментальні дослідження арки, які дозволили отримати дані про її дійсний напружено-деформований стан у випадку використання її без розпірки, з ненапруженою розпіркою, з попередньо напруженою розпіркою, з різними значеннями ексцентриситету зміщення затяжки як для симетричного, так і для несиметричного завантаження конструкції. Експериментально підтверджено доцільність застосування в арці попередньо напруженої розпірки або ексцентриситету зміщення затяжки, що дає можливість виконати дослідна конструкція.

3. Виконано експериментальні дослідження прогону Z-подібного профілю прольотом 6 м в умовах поперечного та косого згинів з можливістю зміни кута нахилу в діапазоні  $0^\circ \dots 25^\circ$  відповідно до ухилу покрівлі будівлі і в результаті отримано нові експериментальні дані про дійсний напружено-деформований стан перфорованих елементів Z-подібного профілю, що працюють в умовах косого згину, в характерних точках поперечних перерізів з отворами і без отворів на трьох розрахункових ділянках по довжині прогону.

4. Встановлено, що руйнування арки з попередньо напруженою розпіркою відбулось через втрату стійкості стиснуто-згинального перфорованого поясу з його площини, а руйнування перфорованого прогону – через втрату місцевої стійкості полиці та стінки на ділянці конструкції з максимальним значенням згинаючого моменту, що призвело до загальної втрати стійкості верхнього поясу прогону із площини

5. Загалом, проведені експериментальні дослідження підтвердили основні теоретичні передумови розрахунку попередньо напруженої арки з перфорованим верхнім поясом та Z-подібного прогону та можливість їх застосування у масовому будівництві.

6. Враховуючи характер руйнування дослідних зразків, перспективним напрямком подальших експериментальних і теоретичних досліджень є вивчення питання стійкості стінки та полиці прокатних профілів на різних розрахункових ділянках в перерізах з отворами різної конфігурації і в перерізах без отворів.

#### СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Конструкції сталеві будівельні. Методи випробування навантаженням [Текст]: ДСТУ Б В.2.6–10–96. – [офіц. вид.]. К., 1997. – 20 с. – (Держстандарт України).
2. Романюк, В.В. Міцність та деформативність перфорованих елементів сталеві арки [Текст]: монографія / В.В. Романюк, В.В. Супрунюк. – Рівне: НУВГП, 2013. – 106 с.
3. Романюк, В.В. Несуча здатність перфорованих прогонів Z-подібного профілю за косого згину [Текст]: монографія / В.В. Романюк, В.В. Василенко, В.В. Супрунюк. – Рівне: НУВГП, 2017. – 206 с.
4. Романюк, В.В. Особливості розрахунку прольотних конструкцій з перфорованих елементів за складного напружено-деформованого стану [Текст] / В.В. Романюк, В.В. Супрунюк // Збірник наукових праць Українського державного університету залізничного транспорту. – Харків: УкрДУЗТ, 2018. – Випуск 175. – С. 98 – 108.
5. Сталеві конструкції [Текст]: ДБН В.2.6 – 198: 2014. – [офіц. вид.]. – К.: ДП «Укрархбудінформ», 2014. – 199 с. – (Нормативний документ Мінрегіонбуду України. Норми проєктування).

## REFERENCES

1. Konstruktsiyi stalevi budiveli. Metody vyprovuvannya navantazhenyiam (Constructions are steel construction. Methods of load testing) [Tekst]: DSTU B V.2.6–10–96. – [ofits. vyd.]. K., 1997. – 20 s. – (Derzhstandart Ukrainy).
2. Romaniuk V. V. Mitsnist ta deformatyvnist perforovanykh elementiv stalevoyi arky (Strength and deformability of perforated elements of steel arch) [Tekst]: Monohrafiya / V. V. Romaniuk, V. V. Supruniuk. – Rivne: NUVHP, 2013. – 106 s.
3. Romaniuk V. V. Nesucha zdattnist perforovanykh prohoniv Z-podibnoho profilu za kosoho z'hynu (Carrying capacity of perforated runs of Z-shaped profile in oblique bending) [Tekst]: onohrafiya / V. V. Romaniuk, V. B. Vasylenko, V. V. Supruniuk. – Rivne: NUVHP, 2017. – 206 s.
4. Romaniuk V. V. Osoblyvosti rozrakhunku prolotnykh konstruktsiy z perforovanykh elementiv za skladnoho napruzhenno-deformovanoho stanu (Features of the calculation of span structures from perforated elements in complex stress-strain state) [Tekst] / V. V. Romaniuk, V. V. Supruniuk // Zbirnyk naukovykh prats Ukrainy koho derzhavnogo universytetu zaliznychnoho transportu. – Kharkiv: UkrDUZT, 2018. – Vypusk 175. – S. 98 – 108.
5. Stalevi konstruktsiyi (Steel structures) [Tekst]: DBN V.2.6 – 198: 2014. – [ofits. vyd.]. – K.: DP «Ukrarkhbudinform», 2014. – 199 s. – (Normatyvnyy dokument Minrehionbudu Ukrainy. Normy proektuvannya).

*Стаття надійшла 18.09.2019 р.*

*Romaniuk V.V., Supruniuk V.V.*

#### **EXPERIMENTAL RESEARCHES OF FLEXIBLE CONSTRUCTIONS FROM PERFORATED ELEMENTS AT A COMPLEX STRESS-DEFORMED STATE**

The purpose and tasks of experimental researches of steel pre-stressed arches with perforated upper belt and perforated stringer of Z-like profile are formulated. They consist in establishing the actual stress-deformed state of constructions for their various design features and for different schemes of applying a load in characteristic sections on different settlement areas.

For this purpose a double-hinged steel arch with a span of 9 m with a perforated upper belt and a pre-tensioned arbor and a perforated Z-like stringer of 6 m was designed and manufactured; experimental installations for the study of steel pre-stressed perforated arches and perforated Z-like stringer at different angles of the design have been developed, which will allow the fastening of structures and loading them in accordance with the actual operating conditions; the actual values of the stresses and deformations that arise in the characteristic sections of the arches elements in different schemes of its loading and structural features, and the perforated stringer, which arise at different angles of the design; the boundary bearing capacity, the shape and character of the destruction of the arch structure with the arrangement for the zero value of the eccentricity of the tightening displacement and with the preliminary tension of the spacer and the perforated Z-like stringer made of a rolled channel at a rational angle of its inclination is established; a comparative analysis of the results of experimental studies with the results of calculations performed on the developed methods and theoretical calculations in PC "Lira" was performed.

The description of a double-hinged steel arch with a perforated upper belt and a pre-stressed arbor, a perforated Z-like stringer, as well as experimental installations, that allow fastening the structures and loading them in accordance with the actual operating conditions are given. The list of devices and equipment used during the experiment is presented. The locations of the measuring equipment in the characteristic sections of the structures along their length, which are located near the application of the external concentrated load, are determined.

The main conclusions from the results of experimental research are presented and the prospective direction of further experimental and theoretical researches is the study of the stability of the wall and the shelf of the rolling profiles at different settlement areas in sections with holes of different configurations and in sections without holes.

**Key words:** arch; stringer; experiment; test bench; gear; equipment; load bearing capacity; stress-strain state.

Романюк В.В., Супрунюк В.В.

### **ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ ПРОЛЕТНЫХ КОНСТРУКЦИЙ ИЗ ПЕРФОРИРОВАННЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ПРИ СЛОЖНОМ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОМ СОСТОЯНИИ**

Сформулированы цель и задачи экспериментальных исследований стальной предварительно напряженной арки с перфорированным верхним поясом и перфорированного прогона Z-образного профиля, которые заключаются в определении действительного напряженно-деформированного состояния конструкций при различных их конструктивных особенностях и при различных схемах приложения нагрузки в характерных сечениях на разных расчетных участках. Приведено описание двухшарнирной стальной арки с перфорированным верхним поясом и предварительно напряженной распоркой, перфорированного Z-образного прогона, а также экспериментальных установок, которые позволяют закрепить конструкции и загрузить их в соответствии с реальным условиям эксплуатации. Представлен перечень приборов и оборудования, использованных в ходе эксперимента.

Приведены основные выводы по результатам экспериментальных исследований и определено, что перспективным направлением дальнейших экспериментальных и теоретических исследований является изучение вопроса устойчивости стенки и полки прокатных профилей на разных расчетных участках в сечениях с отверстиями различной конфигурации и в сечениях без отверстий.

**Ключевые слова:** арка, прогон, эксперимент, установка, прибор, оборудование, несущая способность, напряженно-деформированное состояние.

УДК 624.014.2:624.073.327

Романюк В.В., Супрунюк В.В. **Експериментальні дослідження пролётних конструкцій з перфорованих елементів за складного напружено-деформованого стану** // Опір матеріалів і теорія споруд: наук.-тех збірн. – К.: КНУБА, 2019. – Вип. 103. – С. 189-200.

*Сформульовано мету та задачі експериментальних досліджень сталеві попередньо напруженої арки з перфорованим верхнім поясом та перфорованого прогону Z-подібного профілю, які полягають у встановленні дійсного напружено-деформованого стану конструкцій за різних їх конструктивних особливостей та за різних схем прикладання навантаження у характерних перерізах на різних розрахункових ділянках. Наведено опис конструкцій та експериментальних установок, які дозволяють закріпити конструкції та завантажити їх відповідно до реальних умов експлуатації.*

Табл. 0. Іл. 9. Бібліогр. 5 назв.

UDC 624.014.2:624.073.327

Romaniuk V.V., Supruniuk V.V. **Experimental researches of flexible constructions from perforated elements at a complex stress-deformed state** // Strength of Materials and Theory of Structures: Scientific-&-Technical collected articles. – Kyiv.: KNUBA, 2019. – Issue 103. – P. 189-200. Ukr.

*The purpose and tasks of experimental researches of steel pre-stressed arches with perforated upper belt and perforated stringer of Z-like profile are formulated. They consist in establishing the actual stress-deformed state of constructions for their various design features and for different schemes of applying a load in characteristic sections on different settlement areas. The description of constructions and experimental installations, that allow fastening the structures and loading them in accordance with the actual operating conditions are given.*

Tabl. 0. Fig. 9. Ref. 5.

УДК 624.014.2:624.073.327

*Романюк В.В., Супрунюк В.В. Экспериментальные исследования пролетных конструкций из перфорированных элементов при сложном напряженно-деформированном // Сопrotивление материалов и теория сооружений: науч.-тех сборн. – К.: КНУСА, 2019. – Вып. 103. – С. 189-200. – Укр.*

*Сформулированы цель и задачи экспериментальных исследований стальной предварительно напряженной арки с перфорированным верхним поясом и перфорированного прогона Z-образного профиля, которые заключаются в установлении действительного напряженно-деформированного состояния конструкции при различных их конструктивных особенностях и при различных схем приложения нагрузки в характерных сечениях на разных расчетных участках. Приведено описание конструкции и экспериментальных установок, которые позволяют закрепить конструкции и загрузить их в соответствии с реальным условиям эксплуатации.*

Табл. 0. Ил. 9. Библиогр. 5 назв.

**Автор (вчена ступень, вчене звання, посада):** доцент, кандидат технічних наук, професор кафедри промислового, цивільного будівництва та інженерних споруд НУВГП Романюк Володимир Володимирович.

**Адреса:** 33028 Україна, м. Рівне, вул. Соборна, 11, Національний університет водного господарства та природокористування, кафедра промислового, цивільного будівництва та інженерних споруд.

**Мобільний тел.:** +38(096) 804-31-77

**Імейл:** v.v.romaniuk@nuwm.edu.ua

**ORCID ID:** <https://orcid.org/0000-0002-2539-4654>

**Автор (вчена ступень, вчене звання, посада):** доцент, кандидат технічних наук, доцент кафедри автомобільних доріг, основ та фундаментів НУВГП Супрунюк Володимир Володимирович.

**Адреса:** 33028 Україна, м. Рівне, вул. Соборна, 11, Національний університет водного господарства та природокористування, кафедра автомобільних доріг, основ та фундаментів.

**Мобільний тел.:** +38(097) 732-99-01

**Імейл:** v.v.supruniuk@nuwm.edu.ua

**ORCID ID:** <https://orcid.org/0000-0001-9534-4460>



УДК 72:711

## ОБОЛОНКА – КОМПОЗИЦІЙНИЙ ЕЛЕМЕНТ АРХІТЕКТУРНОГО ОБ’ЄКТУ

Л.Г. Василенко

канд. арх., доцент

*Київський національний університет будівництва і архітектури  
Повітрофлотський просп., 31, м. Київ. 03680*

DOI: 10.32347/2410-2547.2019.103.201-207

Розглядається роль оболонки як архітектурного елемента в загальній композиції об’єктів. Взірці епохи Відродження, Середньовіччя та початку ХХ ст. показали особливості впливу купольних форм на образ об’єкту.

**Ключові слова:** тонкостінна просторова конструкція, оболонка, купол, склепіння, криволінійна форма, об’єкт, композиція.

**Вступ.** Історія архітектури надає приклади творчого використання криволінійних форм, а саме, куполів, оболонок, склепінь – конструктивних елементів, які виконували естетичні функції та відігравали провідну роль у загальній композиції архітектурних об’єктів [1].

З точки зору архітектурної композиції митець проектував об’єкт, виходячи з принципів тектонічності, пропорційності будівлі, завершаючи верхню частину конструкції куполами або шпилями, часто співставляючи свої ідеї з антропологією, структурою людини, природою та зв’язками із Всесвітом. Це було особливо поширено у період Відродження. З часом, форма і роль криволінійних форм у загальній композиційній структурі об’єкта змінювалися. Приклади з історії вітчизняної та європейської архітектури свідчать про це явище [1].

**Постановка задачі.** Задачею статті є порівняння композиційної ролі оболонкових форм на прикладі найбільш відомих архітектурних об’єктів в історії зазначених періодів.

**Стан наукових досліджень.** Архітектурно-конструктивні особливості та процес еволюції криволінійних форм є однією з актуальних проблем для фахівців, архітекторів, науковців, а також для студентів початківців при виконанні ними кваліфікаційних дипломних проектів [2]. Сучасні наукові видання свідчать про появу нової генерації вчених, архітекторів, інженерів, проектувальників, які проявили зацікавленість до проектування багатопрогонових просторових покриттів, що, здебільшого, було викликано появою нових композитних матеріалів.

Застосування криволінійних поверхонь в архітектурі та в будівельній галузі вже давно стало предметом уваги фахівців, вчених. Відомі, що цій темі та проблемам використання аналітичних поверхонь було присвячено чимало книг, монографій, дисертацій, довідників вітчизняних та закордонних авторів [3, 4, 5, 6, 7]. Приділялась увага всебічним аспектам: геометричним параметрам оболонок і тонкостінних конструкцій,

функціональному їх призначенню, характеристиці поверхонь, методам розрахунку об'єктів на міцність, стійкість та динаміку. Велику кількість важливих пропозицій по сучасному застосуванню криволінійних форм знаходимо у будівельно-архітектурних збірниках, часописах і матеріалах наукових конференцій [8, 9]. Цікавим є історико-архітектурний аспект, а саме, композиційна роль оболонки, як центрального (провідного) елемента при формуванні загальної композиції, та доречності їхнього застосування в різних архітектурно-стильових напрямках. Різноманітні приклади з історії будівництва та проектування тонкостінних просторових конструкцій, а також думки авторів про роль цих елементів у композиції, дали поштовх до розвитку цього питання [1, 7].

Існує думка, що фахівців, які проектують тонкостінні оболонкові конструкції, об'єднує прагнення створювати нові форми. А це приводить до нових шляхів вирішення архітектурно-будівельних проблем [10].

Доведено, що купольна конструкція є однією з найбільш доцільних конструктивних форм. Куполи зводили на круглomu плані, його форма є тілом обертання, нижній край якого спирався на розтягнуте кільце, що сприймає розтяг. Були відпрацьовані варіанти верхівки купола: замкнуті та незамкнуті, з центральним отвором для світлового або аераційного ліхтаря [10].

Наведені нижче приклади розкривають зміст нашої думки. Вишуканим є храм-ротонда Пантеон в м. Римі (126 рік н. е., діаметр купола 43.2 м, висота 125 м, рис. 1, [11]), який характеризується досконалим виконанням конструктивних і художньо-естетичних задач, створення найбільшого і неперевершеного за розмірами (до XX ст.) велико-прогоновим куполом. Напівсферичний купол виконаний із горизонтальних шарів бетону і обкладений цеглою. Для полегшення ваги купола його товщина поступово зменшується до вершини. Купол спирається на циліндричну стіну товщиною 6 м. У полюсі оболонки товщина зменшується до 1.5 м. Єдине джерело освітлення це центральний круглий отвір, що обрамлений бронзовим бордюром діаметром 9 м [1].

Цінний внесок у всесвітню архітектурну спадщину зробили майстри Візантії V-XV ст. у вигляді купольних базилік: купола на восьми опорах (V-VIII ст.) та хрестово-купольної системи (XIII-XV ст.). Куполи та склепіння виконувалися окремими кільцями з похилими рядами цегли. Покрівля – черепиця або свинцеві листи [1, 7].

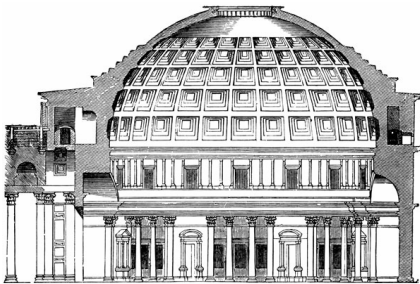


Рис. 1



Рис. 2

Грандіозним твором візантійського зодчества була купольна базиліка собору святої Софії у Константинополі (532-537 рр.), створена грецькими архітекторами Анфімієм та Ісидором. Для полегшення куполу, який відігравав головну композиційну роль в об'єкті, його конструктивні елементи ребра і заповнення між ними викладалися з пемзової цегли [1].

У давні часи поряд із сферичними формами оболонки провідну роль у композиційній структурі об'єктів: церков, базилік, вілл, займали параболічні купольні конструкції [4].

Відомо, що параболоїд обертання – це складна геометрична форма, яка утворюється обертанням параболи  $x^2 = 2pz$  навколо вісі симетрії  $z$ .

Прикладом використання параболічних оболонки є низка архітектурних об'єктів. Європейська історія застосування параболоїдів обертання можна розпочати з опису купола святого Петра у Ватикані (1506-1626 рр. рис. 2, [12]), який став свого роду еталоном для майстрів архітектури. У подальшому майстри брали за взірець купол святого Петра.

Оболонкова форма стала активним центром загальної об'ємної композиції собору Санта-Марія дель фьоре у Флоренції. Зведення купола над кафедральним собором виконано архітектором Ф. Брунеллескі (1420-1436 рр., рис. 3, [13]). Купол параболоїдної форми був зведений з природнього каменю і цегли без кружал діаметром 42 м Автором не розкрито секрет зведення куполу без кружал [1].

На початку ХХ ст. в історії вітчизняної архітектури також знаходимо приклади застосування оболонкових конструкцій.

Вплив класичного стилю був відчутний у застосуванні пологого сферичного скляного купола при будівництві Педагогічного музею в м. Києві за проектом архітектора П.Ф. Альошина (зведений в 1909-1912 рр., рис. 4, [14]). У даному прикладі сферична форма не є провідним елементом об'ємної композиції, а лише завершенням тектоніки споруди.



Рис. 3



Рис. 4

У першій третині ХХ ст. на сторінках часопису «Радянський театр» публікувалися кращі проекти з Міжнародного конкурсу на театр масового

Музикального дійства (м. Харків, 1930-1931 рр.) [15]. Це було творчим змаганням вітчизняних та закордонних фахівців. Програма конкурсу обговорювалась у середовищі архітекторів, художників, режисерів, фахівців сцени, інженерів. Було поставлено завдання запроєктувати багатофункціональний театр, використовуючи новітні архітектурні форми. З представлених проєктів цікавими були варіанти, де автори застосовували купольні оболонки для перекриття оглядової зали. Одним із новаторських проєктів був проєкт під девізом «Два кільця, що перетинаються» (архітектори брати О.О., Л.О., В.О. Весніни, рис. 5, [16]). Полога купольна конструкція створювала органічне поєднання усіх складових елементів об'єкту, але не була головною формою в композиції, як це спостерігається у вище розглянутих прикладах.

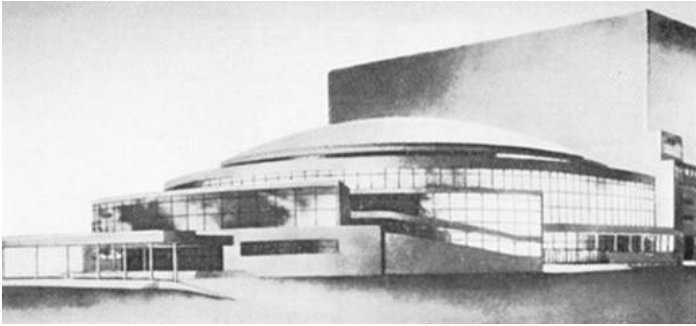


Рис. 5

Складна купольна конструкція також була використана для перекриття оглядової зали в іншому проєкті, авторами якого були молоді архітектори, випускники КХІ Холостенко М.В., Юрченко П.Г. Їх проєкт був витриманий у рисах авангардної архітектури [15]. Загалом ці проєкти показали, що поряд із новими новаторськими тенденціями архітектори застосовували криволінійні форми, які були органічно гармонізовані зі строгими лінійними формами, характерними для конструктивізму.

Подібним прикладом оболонки сферичної форми є скляний купол будівлі Верховної Ради України (архітектор В.І. Заболотний, 1936-1939 рр.).

Незважаючи на задекларовані тези функціоналістів про значимість простору горизонтальних і вертикальних площин у формуванні об'єктів інколи архітектори застосовували в ескізах, проєктах і побудованих об'єктах криволінійні форми типу оболонкових конструкції. Автори застосовували найбільш оптимальну форму оболонки, ґрунтуючись на функціональній необхідності, міцності та естетиці.

### **Висновок**

У результаті нашого екскурсу в історію купольних споруд Візантії та Римської імперії, не поглиблюючись в деталізацію інших періодів і порівнюючи з початком ХХ ст., спостерігаємо активне використання купольних форм, які в давній історії були провідними, центральними

архітектурними формами, у яких втілювався образ величі, статичності, впевненості, де людина відчувала цілісність середовища. Архітектурна мова була обумовлена купольною формою, яка відіграла провідну роль в композиції, майже неземною, спрямованою до неба, і цим вражала людей. В містобудівному середовищі ці об'єкти мали значний акцент.

З часом, а саме початку ХХ ст. купольні форми (окрім церковних споруд) втрачають свою провідну позицію – на перший план виходять геометричні, вертикальні та горизонтальні площинні форми, які відіграють провідну роль в композиції та формують образ. В окремих випадках, коли потрібно підкреслити центричність, рівновагу, статику і симетрію, зустрічаються купольні форми незначної кривизни. Часові, соціальні, функціонально-естетичні та прогресивно-технологічні фактори змінили образ архітектурного об'єкта.

#### СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Всеобщая история архитектуры. Том V. Архитектура Западной Европы XV—XVI веков. Эпоха Возрождения. – М.: Стройиздат, 1967 – 658 с.
2. Архів бакалаврських дипломних проектів кафедри містобудування КНУБА. – Київ: КНУБА, 2019 р.
3. *Кривошапко С.Н.* История развития архитектуры пространственных структур и оболочек с элементами расчета – М.: Изд-во РУДН, 2015. – 156 с.
4. *Кривошапко С.Н.* К вопросу о применении параболических оболочек вращения в строительстве в 2000-2017 годах // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2017. – № 4. – С. 4-14.
5. *Гринько Е.А.* Обзорные работы по геометрии, прочности, устойчивости, динамике и применению оболочек со срединными поверхностями различных классов // Монтажные и специальные работы в строительстве. 2012. – № 2. – С. 15-21.
6. *Подгорный А.Л., Гринько Е.А., Соловей Н.А.* Исследование новых форм поверхностей применительно к конструкциям различного назначения // Вестник Российского университета дружбы народов. Серия: Инженерные исследования. 2013. – № 1. – С. 140-145.
7. Історія української архітектури / За ред. *В.І. Тимофієнка*. – К.: Техніка, 2003. – 472 с.
8. Архитектура оболочек и прочностной расчет тонкостенных строительных и машиностроительных конструкций сложной формы: Труды Международной научной конференции. – М.: Изд-во РУДН, 2001. – 488 с.
9. Сучасна архітектурна освіта. Композиція, мистецтво в програмі архітектурної підготовки. – Тези VII Всеукраїнської наукової конференції 28 жовтня 2015р. – К: КНУБА, 2015.
10. *Михайленко В.Е., Обухова В.С., Подгорный А.Л.* Формообразование оболочек в архитектуре. – К.: Будівельник, 1972. – 205 с.
11. [Електронний ресурс]. – Режим доступу: <https://italy4.me/lazio/roma/rimski-panteon.html>
12. [Електронний ресурс]. – Режим доступу: [https://ru.wikipedia.org/wiki/Собор\\_Святого\\_Петра](https://ru.wikipedia.org/wiki/Собор_Святого_Петра).
13. [Електронний ресурс]. – Режим доступу: <http://www.blogitaliano.com/gorodaitalii/firenze/sobor-santa-mariya-del-fore-vo-florencii.html>
14. [Електронний ресурс]. – Режим доступу: [https://uk.wikipedia.org/wiki/Pedahohichnyi\\_muzei](https://uk.wikipedia.org/wiki/Pedahohichnyi_muzei)
15. Радянський театр, часопис. – Харків, 1931. – № 5.
16. [Електронний ресурс]. – Режим доступу: <http://kannelura.info/?p=15096>.

#### REFERENCES

1. Vseobshaya istoriya arhitektury. Tom V. Arhitektura Zapadnoj Evropy XV—XVI vekov. Epoha Vozrozhdeniya. – Moskva, Strojizdat, 1967 — 658 s. [A general history of architecture. Vol. V. Architecture of Western Europe XV-XVI centuries. Renaissance. - Moscow, Stroyizdat, 1967 - 658 p. – in Russian].

2. Arhiv bakalavrskih diplomnih proektiv kafedri mistobuduvannya KNUBA. – Kyiv: KNUBA, 2019 r. [Archive of Bachelor's Degree Projects of KNUBA City Department. - Kyiv: KNUBA, 2019. – in Ukrainian].
3. *Krivoshapko S.N.* Istoriya razvitiya arhitektury prostranstvennyh struktur i obolochek s elementami rascheta: UMK. – M.: Izd-vo RUDN, 2015. – 156 s. [The history of the development of the architecture of spatial structures and shells with elements of calculation: CMC. - M.: Publishing House of RUDN, 2015. - 156 p. – in Russian].
4. *Krivoshapko S.N.* K voprosu o primenenii parabolicheskikh obolochek vrasheniya v stroitelstve v 2000-2017 godah// Stroitel'naya mehanika inzhenernykh konstrukcij i sooruzhenij. – 2017. – № 4. – S. 4-14. [To the question of the use of parabolic shells of revolution in construction in 2000-2017 // Structural mechanics of engineering structures and structures. - 2017. - No. 4. - C. 4-14. – in Russian].
5. *Grinko E.A.* Obzornye raboty po geometrii, prochnosti, ustojchivosti, dinamike i primeneniyu obolochek so sredinnyimi poverhnostyami razlichnyh klassov // Montazhnye i specialnye raboty v stroitelstve. 2012. № 2. – S. 15-21. [Survey works on geometry, strength, stability, dynamics and the use of shells with middle surfaces of various classes // Installation and special work in construction. 2012. No. 2. - S. 15-21. – in Russian].
6. *Podgornyj A.L., Grinko E.A., Solovei N.A.* Issledovanie novykh form poverhnostej primenitelno k konstrukciyam razlichnogo naznacheniya // Vestnik Rossijskogo universiteta družby narodov. Seriya: Inzhenernye issledovaniya. 2013. № 1. S. 140-145. [The study of new forms of surfaces in relation to structures for various purposes // Bulletin of the Peoples' Friendship University of Russia. Series: Engineering Research. 2013. No. 1. S. 140-145. – in Russian].
7. *Istoriia ukrainskoi arhitektury / Za red. V.I. Timofienka.* – K.: Tekhnika, 2003. – 472 s. [History of Ukrainian Architecture / Ed. V.I. Timothyenko. - K.: Engineering, 2003. - 472 p.].
8. Arhitektura obolochek i prochnostnoj raschet tonkostennyh stroitelnyh i mashinostroitelnyh konstrukcij slozhnoj formy: Trudy Mezhdunarodnoj nauchnoj konferencii. – M.: Izd-vo RUDN, 2001. – 488 s. [Shell architecture and strength analysis of thin-walled building and engineering structures of complex shape: Proceedings of the International Scientific Conference. - M.: Publishing House of RUDN, 2001. - 488 p. – in Russian].
9. *Mihajlenko V.E., Obuhova V.S., Podgornyj A.L.* Formoobrazovanie obolochek v arhitekture. – K.: Budivelnik, 1972. – 205 s. [Shell shaping in architecture. - K.: Budivelnik, 1972. - 205 p. – in Russian].
10. [Electronic resource]. - Access mode: <https://italy4.me/lazio/roma/rimski-panteon.html>
11. [Electronic resource]. - Access mode: [https://ru.wikipedia.org/wiki/Собор\\_Святого\\_Петра](https://ru.wikipedia.org/wiki/Собор_Святого_Петра)
12. [Electronic resource]. - Access mode: <http://www.blogoitalliano.com/goroda-italii/finenze/sobor-santa-mariya-del-fore-vo-florencii.html>
13. [Electronic resource]. - Access mode: [https://uk.wikipedia.org/wiki/Педагогічний\\_музей](https://uk.wikipedia.org/wiki/Педагогічний_музей)
14. Radyanskij teatr, chasopis. – Harkiv, 1931. – № 5. [Soviet theater, magazine. - Kharkov, 1931. - No. 5. – in Ukrainian].
15. [Electronic resource]. - Access mode: <http://kannelura.info/?p=15096>.

*Стаття надійшла 05.09.2019 р.*

*Vassylenko L.G.*

### **THE SHELL – A COMPOSITIONAL COMPONENT OF AN ARCHITECTURAL OBJECT**

The role of the shell as an architectural element in the overall composition of objects is considered. The aim of the work is the analysis and comparison of the compositional role of dome forms using the most famous historical architectural objects as the example.

The history of architecture provides many examples of the creative use of curvilinear forms, namely, shells, domes, and arch. A brief overview of examples of outstanding objects from the history of architecture is being carried out. Dome structures of Byzantium and the Roman Empire are being considered. Without going deep into detailing other periods, the active use of dome forms in architecture is noted. These forms at that time were the leading, central elements of the composition. In the urban environment, these objects had a significant emphasis.

Over time, namely from the beginning of the twentieth century, dome forms (except for church buildings) lose their leading position. Geometric vertical and horizontal plane forms come to the fore. They play a constructive and leading role in the composition. Moreover, in some cases, dome

forms are still encountered when equilibrium and static symmetry are required. However, these elements are subordinate in the overall composition and serve to balance all the elements of the object as a whole. Temporary, social, aesthetic-functional and progressive-technological factors have contributed to the new approach to the creation of an architectural object. The language, the syntax of this object has changed drastically.

**Keywords:** thin-walled spatial structure; shell; dome; arch; curvilinear form; object; composition.

*Василенко Л.Г.*

#### **ОБОЛОЧКА – КОМПОЗИЦИОННЫЙ ЭЛЕМЕНТ АРХИТЕКТУРНОГО ОБЪЕКТА**

Рассматривается роль оболочки как архитектурного элемента в общей композиции объектов. Примеры образцов Возрождения, Средневековья и начала XX в. показали особенности влияния купольных форм на образ объекта.

**Ключевые слова:** тонкостенная пространственная конструкция, оболочка, купол, свод, криволинейная форма, объект, композиция.

УДК 72:711

*Василенко Л.Г.* **Оболочка – композиційний елемент архітектурного об'єкта** // Опір матеріалів і теорія споруд: наук.-тех. збірн. – К.: КНУБА, 2019. – Вип. 103. – С. 201-207.

*Розглядається роль оболонки як архітектурного елемента в загальній композиції об'єктів.*

Ил. 7. Библиогр. 16 назв.

UDC 72:711

*Vassylenko L.G.* **The shell – a compositional component of an architectural object** // Strength of Materials and Theory of Structures: Scientific-and-technical collected articles. – К.: KNUCA, 2019. – Issue 103. – P. 201-207. – Ukr.

*The role of the shell as an architectural element in the overall composition of objects is considered.*

Fig. 5. Ref. 16.

УДК 72:711

*Василенко Л.Г.* **Оболочка– композиційний елемент архітектурного об'єкта** // Опір матеріалів і теорія споруд: наук.-тех. збірн. – К.: КНУБА, 2019. – Вип. 103. – С. 201-207.

*Рассматривается роль оболочки как архитектурного элемента в общей композиции объектов.*

Ил. 7. Библиогр.16 назв.

**Автор (вчена ступень, вчене звання, посада):** кандидат архітектури, доцент, доцент кафедри містобудування *ВАСИЛЕНКО Людмила Григорівна*

**Адреса робоча:** 03680 Україна, м. Київ, Повітрофлотський проспект 31, Київський національний університет будівництва і архітектури.

**Робочий тел.:** +38(044) 241-55-70.

**мобільний тел.:** +38(066)299-49-01

**Імейл:** [vassylenko.lg@knuba.edu.ua](mailto:vassylenko.lg@knuba.edu.ua)

**ORCID ID:** <https://orcid.org/0000-0002-3122-0917>

УДК 539.3

## ДОСЛІДЖЕННЯ ПЕРШОЇ ОСНОВНОЇ ЗАДАЧІ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ ДЛЯ ШАРУ З ЦИЛІНДРИЧНОЮ ПОРОЖНИНОЮ

**В.Ю. Мірошніков<sup>1</sup>,**

канд. техн. наук, доцент

**Т.В. Денисова<sup>2</sup>,**

канд. техн. наук, доцент

**В.С. Проценко<sup>3</sup>,**

д-р фіз.-мат. наук, професор

<sup>1</sup>*Харківський національний університет будівництва та архітектури, м. Харків*<sup>2</sup>*Харківський національний економічний університет, м. Харків*<sup>3</sup>*Національний аерокосмічний університет ім. Н.С. Жуковського «ХАІ»*

DOI: 10.32347/2410-2547.2019.103.208-218

Розв'язано просторову задачу теорії пружності для шару з поздовжньою циліндричною порожниною, коли на межах шару та на межі порожнини задані напруження. Розв'язок задачі отримано узагальненим методом Фур'є стосовно системи рівнянь Ламе в циліндричних координатах, пов'язаних із циліндром, та декартових координатах, пов'язаних із межами шару. Нескінченні системи лінійних алгебраїчних рівнянь, які отримані в результаті задоволення граничних умов, вирішено методом зрізання. В результаті були отримані напруження в різних точках пружного тіла. Проведено аналіз напружено – деформованого стану шару від дії зрівноваженого навантаження на його межах.

**Ключові слова:** циліндрична порожнина в шарі; рівняння Ламе; узагальнений метод Фур'є; нескінченні системи лінійних алгебраїчних рівнянь.

### Вступ

При проектуванні конструкцій, деталей машин та споруд досить часто зустрічаються задачі, коли необхідно оцінити міцність пружного середовища в околі циліндричних порожнин чи включень. В якості таких задач можуть бути задачі про деформацію пружного шару з поздовжніми циліндричними порожнинами із заданими на межах тіла навантаженнями.

В науковій літературі розглядаються такі задачі. Так в роботах [1–4] розв'язуються задачі для шару з перпендикулярними до його меж порожнинами. Для розв'язання задач статички просторових пружних тіл у вигляді шару з поздовжніми порожнинами ці методи не можуть бути використані.

Просторові (тривимірні) задачі теорії пружності для тіл, які обмежені канонічними поверхнями (циліндр, конус, куля, еліпсоїд, параболоїд та ін.) вивчалися в роботі [5]. Точні розв'язки в цій роботі отримані виключно методом розділення змінних і методом Фур'є.

З паралельними до меж шару циліндричними порожнинами розглядаються стаціонарні задачі дифракції пружних хвиль в роботах [6–8], де використовується узагальнений метод Фур'є в поєднанні з методом зображень.

Для пружних тіл з декількома граничними поверхнями авторами роботи [9] розвинуто узагальнений метод Фур'є, який базується на основі теорем додавання базисних розв'язків рівняння Ламе.

© Мірошніков В.Ю., Денисова Т.В., Проценко В.С.



За допомогою цього методу розв'язані задачі: для шару зі сферичною порожниною [10]; для півпростору з поздовжніми циліндричними порожнинами [11–14], для простору і циліндра з циліндричними порожнинами і включеннями в роботі [15]. Задачу для шару з циліндричною порожниною та заданими на граничних поверхнях переміщеннями розглянуто в роботі [16], для шару з пружним включенням в роботі [17], з поздовжньою товстостінною трубою в роботі [18].

Для шару з циліндричною порожниною та заданими на граничних поверхнях напруженнями готових алгоритмів в просторовому варіанті немає, тож проблема розрахунку таких задач є актуальною.

Метою цієї роботи є:

– розробка аналітико-числового методу розрахунку першої основної задачі теорії пружності (на усіх граничних поверхнях задані напруження) для шару з циліндричною порожниною, яка розташована паралельно поверхням шару;

– провести аналіз напружено-деформованого стану тіла від дії зрівноваженого нормального навантаження, прикладеного на межі шару, при вільній від навантаження межі порожнини.

### Постановка задачі

В пружному однорідному шарі розташована кругова циліндрична порожнина радіусом  $R$  (рис. 1), вісь симетрії якої паралельна граничним поверхням шару.

Порожнину будемо розглядати у циліндричній системі координат  $(\rho, \varphi, z)$ , шар у декартовій системі координат  $(x, y, z)$ , яка однаково орієнтована та поєднана з системою координат циліндра. Верхня межа шару розташована на відстані  $y=h$ , нижня межа на відстані  $y=-\tilde{h}$ . Потрібно знайти розв'язок рівняння Ламе

$\Delta \vec{U} + (1-2\sigma)^{-1} \nabla \operatorname{div} \vec{U} = 0$  за умов, що на межах шару та на межі циліндричної порожнини задані напруження:

$$F\vec{U}(x, z)|_{y=h} = \vec{F}_h^0(x, z), \quad F\vec{U}(x, z)|_{y=-\tilde{h}} = \vec{F}_{\tilde{h}}^0(x, z), \quad F\vec{U}(\varphi, z)|_{\rho=R} = \vec{F}_R^0(\varphi, z),$$

де

$$\begin{aligned} \vec{F}_h^0(x, z) &= \tau_{yx}^{(h)} \vec{e}_1^{(1)} + \sigma_y^{(h)} \vec{e}_2^{(1)} + \tau_{yz}^{(h)} \vec{e}_3^{(1)}, \\ \vec{F}_{\tilde{h}}^0(x, z) &= \tau_{yx}^{(\tilde{h})} \vec{e}_1^{(1)} + \sigma_y^{(\tilde{h})} \vec{e}_2^{(1)} + \tau_{yz}^{(\tilde{h})} \vec{e}_3^{(1)}, \\ \vec{F}_R^0(\varphi, z) &= \sigma_\rho^{(R)} \vec{e}_1^{(2)} + \tau_{\rho\varphi}^{(R)} \vec{e}_2^{(2)} + \tau_{\rho z}^{(R)} \vec{e}_3^{(2)}, \end{aligned} \quad (1)$$

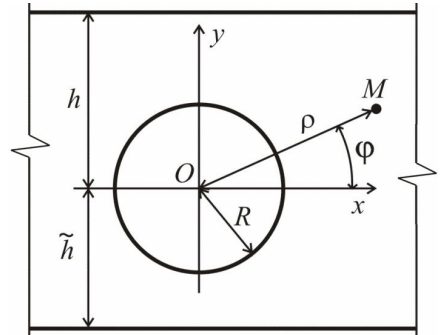


Рис. 1. Шар з циліндричною порожниною

відомі функції;  $\vec{e}_j^{(k)}$  ( $j=1,2,3$ ) – орти декартової ( $k=1$ ) і циліндричної ( $k=2$ ) систем координат,  $F\vec{U} = 2G\left[\frac{\sigma}{1-2\sigma}\vec{n}\operatorname{div}U + \frac{\partial}{\partial n}\vec{U} + \frac{1}{2}(\vec{n}\times\operatorname{rot}\vec{U})\right]$ ,

$G = \frac{E}{2(1+\sigma)}$ ;  $\sigma$ ,  $E$  – коефіцієнт Пуассона і модуль пружності шару.

При цьому, виходячи з умов статички, повинні виконуватись рівняння рівноваги

$$\iint_{(\sigma)} \vec{F}(M) d\sigma = 0, \quad \iint_{(\sigma)} \vec{r} \times \vec{F}(M) d\sigma = 0, \quad (2)$$

де  $\sigma = \{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3\}$ ,  $\sigma_1$  – площина на  $y=h$ ,  $\sigma_2$  – площина на  $y=-\tilde{h}$ ,  $\sigma_3$  –

поверхня циліндра  $\rho=R$ ,  $\vec{F}(M) = \begin{cases} \vec{F}_h^0(x, z) \text{ на } \sigma_1 \\ \vec{F}_{\tilde{h}}^0(x, z) \text{ на } \sigma_2, \vec{r} - \text{ радіус вектор т. М.} \\ \vec{F}_R^0(\varphi, z) \text{ на } \sigma_3 \end{cases}$

Усі задані вектори і функції будемо вважати швидко спадаючими до нуля на далеких відстанях від початку координат по координаті  $z$  для циліндра та по координатах  $x$  і  $z$  для меж шару.

### Розв'язок задачі

Виберемо базисні розв'язки рівняння Ламе для зазначених систем координат у вигляді [9]:

$$\vec{u}_k^\pm(x, y, z; \lambda, \mu) = N_k^{(d)} e^{i(\lambda z + \mu x) \pm \gamma y};$$

$$\vec{R}_{k,m}(\rho, \varphi, z; \lambda) = N_k^{(p)} I_m(\lambda \rho) e^{i(\lambda z + m\varphi)}; \quad (3)$$

$$\vec{S}_{k,m}(\rho, \varphi, z; \lambda) = N_k^{(p)} \left[ (\operatorname{sign} \lambda)^m K_m(|\lambda| \rho) \cdot e^{i(\lambda z + m\varphi)} \right], \quad k=1, 2, 3;$$

$$N_1^{(d)} = \frac{1}{\lambda} \nabla; \quad N_2^{(d)} = \frac{4}{\lambda} (\sigma - 1) \vec{e}_2^{(1)} + \frac{1}{\lambda} \nabla(y); \quad N_3^{(d)} = \frac{i}{\lambda} \operatorname{rot}(\vec{e}_3^{(1)}); \quad N_1^{(p)} = \frac{1}{\lambda} \nabla;$$

$$N_2^{(p)} = \frac{1}{\lambda} \left[ \nabla \left( \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + 4(\sigma - 1) \left( \nabla - \vec{e}_3^{(2)} \frac{\partial}{\partial z} \right) \right]; \quad N_3^{(p)} = \frac{i}{\lambda} \operatorname{rot}(\vec{e}_3^{(2)});$$

$$\gamma = \sqrt{\lambda^2 + \mu^2}, \quad -\infty < \lambda, \mu < \infty,$$

де  $\sigma$  – коефіцієнт Пуассона;  $I_m(x)$ ,  $K_m(x)$  – модифіковані функції Бесселя;  $\vec{R}_{k,m}$ ,  $\vec{S}_{k,m}$ ,  $k=1, 2, 3$  – відповідно внутрішні та зовнішні розв'язки рівняння Ламе для циліндра;  $\vec{u}_k^{(-)}$ ,  $\vec{u}_k^{(+)}$  – розв'язки рівняння Ламе для шару.

Розв'язок задачі представимо у вигляді [16]

$$\vec{U} = \sum_{k=1}^3 \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} B_{k,m}(\lambda) \cdot \vec{S}_{k,m}(\rho, \varphi, z; \lambda) d\lambda +$$

$$+ \sum_{k=1}^3 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left( H_k(\lambda, \mu) \cdot \bar{u}_k^{(+)}(x, y, z; \lambda, \mu) + \tilde{H}_k(\lambda, \mu) \cdot \bar{u}_k^{(-)}(x, y, z; \lambda, \mu) \right) d\mu d\lambda, \quad (4)$$

де  $\bar{S}_{k,m}(\rho, \varphi, z; \lambda)$ ,  $\bar{u}_k^{(+)}(x, y, z; \lambda, \mu)$  і  $\bar{u}_k^{(-)}(x, y, z; \lambda, \mu)$  базисні розв'язки, які задані формулами (3), а невідомі функції  $H_k(\lambda, \mu)$ ,  $\tilde{H}_k(\lambda, \mu)$  і  $B_{k,m}(\lambda)$  необхідно знайти із крайових умов.

Для переходу базисних розв'язків між системами координат скористаємось формулами [18].

Для виконання граничних умов на верхній межі шару  $y=h$ , вектори  $\bar{S}_{k,m}$  в (4) за допомогою формул переходу [18, формула (7)] перепишемо у декартовій системі координат через базисні розв'язки  $\bar{u}_k^{(-)}$ . Для отриманого вектору знайдемо напруження та прирівняємо (при  $y=h$ ) заданому  $\bar{F}_h^0(x, z)$ , представленою через подвійний інтеграл Фур'є.

Для виконання граничних умов на нижній межі шару  $y=-\tilde{h}$ , вектори  $\bar{S}_{k,m}$  в (4) за допомогою формул переходу [18, формула (7)] перепишемо у декартовій системі координат через базисні розв'язки  $\bar{u}_k^{(+)}$ . Для отриманого вектору знайдемо напруження та прирівняємо (при  $y=-\tilde{h}$ ) заданому  $\bar{F}_{\tilde{h}}^0(x, z)$ , представленою через подвійний інтеграл Фур'є.

Система з 6 рівнянь має визначник

$$\frac{64 \cdot e^{-3x} \cdot \gamma^8 \cdot \sigma^6 \cdot \left( (3/4 + x^2) \cdot (1 - e^{2x}) + 1/4 \cdot e^{6x} - 1/4 \right)}{\lambda^4}, \quad (5)$$

де  $x = \gamma(h + \tilde{h})$ .

З отриманих рівнянь знайдемо функції  $H_k(\lambda, \mu)$  і  $\tilde{H}_k(\lambda, \mu)$  через  $B_{k,m}(\lambda)$ .

Для виконання граничних умов на циліндрі  $\rho=R$ , праву частину (4) за допомогою формул переходу [18, формула (8)] перепишемо у циліндричній системі координат через базисні розв'язки  $\bar{R}_{k,m}$ ,  $\bar{S}_{k,m}$ . Для отриманого вектору знайдемо напруження та прирівняємо заданому  $\bar{F}_R^0(\varphi, z)$ , представленою інтегралом та рядом Фур'є. В результаті отримаємо сукупність трьох систем лінійних алгебраїчних рівнянь для визначення невідомих  $B_{k,m}(\lambda)$ .

Визначник цієї системи [11]:

$$\begin{aligned} \text{для } m = 0 \quad & |\Delta_0| = 8(1 - \sigma) \cdot x^2 \cdot K_1^2(x) \cdot K_2(x), \\ \text{для } m \geq 1 \quad & |\Delta_m| > 4m \cdot K_{m-1}(x) K_m(x) K_{m+1}(x), \quad x = |\lambda| \rho, \quad \lambda \neq 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Знайдені раніше через  $B_{k,m}(\lambda)$  функції  $H_k(\lambda, \mu)$  і  $\tilde{H}_k(\lambda, \mu)$  виключимо з системи рівнянь. В результаті отримаємо сукупність із трьох нескінчених

систем лінійних алгебраїчних рівнянь другого роду для визначення невідомих  $B_{k,m}(\lambda)$ .

Для отриманих систем, використовуючи (5) та (6), доведено їх однозначну розв'язність. Більш того, ці системи можна розв'язувати методом зрізання і має місто збіжність наближених рішень до точного.

Знайдені з нескінченної системи рівнянь функції  $B_{s,m}(\lambda)$  підставимо у вирази для  $H_k(\lambda, \mu)$  і  $\tilde{H}_k(\lambda, \mu)$ . Цим будуть визначені всі невідомі задачі.

### Числові дослідження напруженого стану

Маємо однорідний ізотропний шар (Бетон класу В30) з циліндричною порожниною (рис. 1), коефіцієнт Пуассона  $\sigma=0,16$ , модуль пружності  $E=3250$  кН/см<sup>2</sup>. Радіус циліндричної порожнини  $R=5$  см. Верхня та нижня межа шару розташовані відносно центру порожнини на відстані  $h=\tilde{h}=15$  см.

На верхній межі шару задані напруження  $\sigma_y^{(h)} = -F \cdot \sigma_1(z) \cdot \sigma_2(x)$ ,

$\tau_{yx}^{(h)} = \tau_{yz}^{(h)} = 0$ , де  $F=1$  кН/см<sup>2</sup> – розподілене навантаження,

$$\sigma_1(z) = \begin{cases} |z| \geq b/2 + c, & \sigma_1(z) = 0 \\ b/2 \leq |z| \leq b/2 + c, & \sigma_1(z) = \frac{b/2 + c - |z|}{c}, \\ |z| \leq b/2, & \sigma_1(z) = 1 \end{cases}$$

$$\sigma_2(x) = \begin{cases} |x| \geq a/2 + c, & \sigma_2(x) = 0 \\ a/2 \leq |x| \leq a/2 + c, & \sigma_2(x) = \frac{a/2 + c - |x|}{c}, \\ |x| \leq a/2, & \sigma_2(x) = 1 \end{cases}$$

$b=18$  см,  $a=6$  см,  $c=2$  см. На нижній межі шару задані напруження  $\sigma_y^{(\tilde{h})} = -\left(\frac{F}{2} \cdot \sigma_1(z) \cdot (\sigma_2(x-15) + \sigma_2(x+15))\right)$ ,  $b=18$  см,  $a=6$  см,  $c=2$  см,

$\tau_{yx}^{(\tilde{h})} = \tau_{yz}^{(\tilde{h})} = 0$ . На поверхні порожнини задані напруження

$\sigma_\rho^{(R)} = \tau_{\rho\phi}^{(R)} = \tau_{\rho z}^{(R)} = 0$ .

Умова (2), при заданих напруженнях, виконується.

Нескінченна система рівнянь була зведена до кінцевої –  $m=6$ . Обчислення інтегралів виконано за допомогою квадратурних формул Філона (для коливних функцій) і Сімпсона (для функцій без коливань). Точність виконання граничних умов при вказаних значеннях геометричних параметрів  $10^{-2}$ .

На рис. 2 представлений напружений стан на перешийках від циліндричної порожнини до верхньої (рис. 2,(а)) та нижньої (рис. 2,(б)) межі шару вздовж осі  $y$ , при  $z=0$ , в кН/см<sup>2</sup>.

На верхньому перешийку, при заданих  $\sigma_\rho$  на поверхні порожнини та верхній межі шару (рис. 2,(а), лінія 1,  $y=0$ см.,  $y=15$ см.), напруження  $\sigma_\phi$  і  $\sigma_z$  (рис. 2,(а), лінії 2 та 3 відповідно) ближче до порожнини мають додатні значення, ближче до верхньої межі шару – від'ємні.

На нижньому перешийку (рис. 2,(б)) всі напруження мають додатні значення, включаючи  $\sigma_\rho$ , яке на нижній поверхні шару та на поверхні порожнини задано нуль, але на самому перешийку набуває ненульових значень.

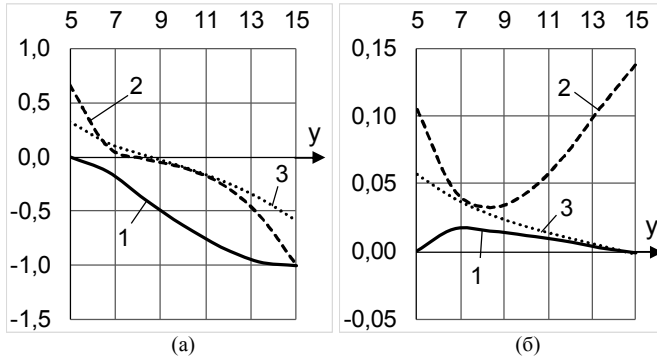


Рис. 2. Напружений стан на перешийках: (а) – від циліндричної порожнини до верхньої межі шару; (б) – від циліндричної порожнини до нижньої межі шару; 1 –  $\sigma_\rho$ ; 2 –  $\sigma_\phi$ ; 3 –  $\sigma_z$

На рис. 3 представлені напруження на верхній межі шару вздовж осі  $z$ , при  $x=0$ , в  $\text{kH/cm}^2$ .

Напруження  $\sigma_z$  на верхній межі шару вздовж осі  $z$  (рис. 3, лінія 3) мають від'ємні значення в межах навантаження (рис. 3, лінія 1), за межами – додатні.

При ширині навантаження  $b=18$  см. напруження  $\sigma_x$  (рис. 3, лінія 2) досягають значення напружень  $\sigma_y$  при  $z=0$ .

На рис. 4 відображені напруження, що виникають на поверхні порожнини при  $z=0$ , в  $\text{kH/cm}^2$ .

Максимальні від'ємні напруження  $\sigma_\phi$  на поверхні порожнини (рис. 4, лінія 2) виникають при  $\phi=0,39$  та  $\phi=2,75$ , додатні при  $\phi=1,57$ .

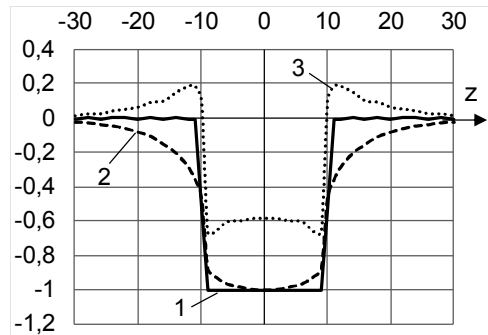


Рис. 3. Напруження на верхній межі шару вздовж осі  $z$  при  $x=0$ : 1 –  $\sigma_y$ ; 2 –  $\sigma_x$ ; 3 –  $\sigma_z$

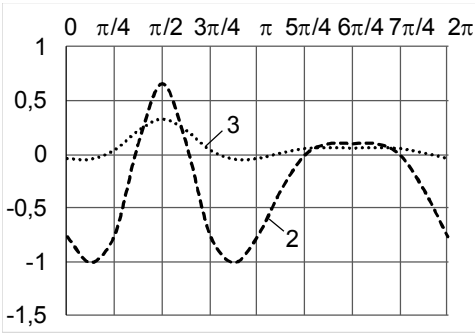


Рис. 4. Напруження на поверхні порожнини:

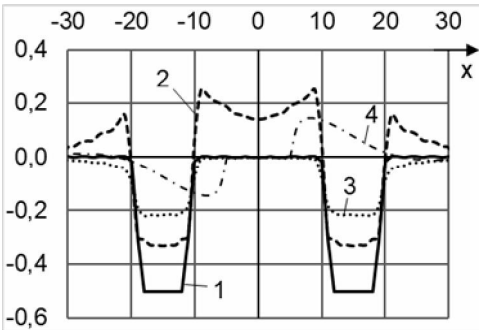
2 –  $\sigma_\varphi$ ; 3 –  $\sigma_z$ 

Рис. 5. Напруження на нижній межі шару вздовж

осі  $x$ : 1 –  $\sigma_y$  при  $y = -\tilde{h}$ ; 2 –  $\sigma_x$  при  $y = -\tilde{h}$ ;3 –  $\sigma_z$  при  $y = -\tilde{h}$ ; 4 –  $\tau_{xy}$  при  $y = 0$ 

(рис.5, лінія 3) також мають від'ємні значення в межах навантаження, натомість між навантаженнями отримують нульові значення.

Найбільші дотичні напруження  $\tau_{xy}$  вздовж осі  $x$  (рис. 5, лінія 4) традиційно знаходяться на осьовій лінії  $x$  ( $y=0$ ), та є максимальними біля порожнини.

### Висновки

Розроблений аналітико-числовий алгоритм розрахунку першої основної просторової задачі теорії пружності для шару з циліндричною порожниною, яка розташована паралельно поверхням шару. Задача зведена до сукупності нескінчених систем лінійних алгебраїчних рівнянь.

На основі числових досліджень алгебраїчної системи можна стверджувати, що розв'язок цієї системи може бути з будь якою ступінню точності знайдено методом редукції. Це підтверджується високою точністю виконання граничних умов.

Максимальні напруження  $\sigma_z$  (рис. 4, лінія 3) виникають в верхній частині порожнини, при  $\varphi = 1,57$ .

Нормальні напруження при  $y = -\tilde{h}$  та дотичні при  $y = 0$  вздовж осі  $x$ , при  $z = 0$ , представлені на рис. 5 в  $\text{kH/cm}^2$ .

На нижній межі шару напруження  $\sigma_x$  вздовж осі  $x$  (рис. 5, лінія 2) мають від'ємні значення в межах навантаження, за межами навантаження напруження  $\sigma_x$  набувають додатних значень. Між навантаженнями додатні напруження  $\sigma_x$  збільшуються, але під порожниною спостерігається невелике їх зниження. Таким чином максимальні додатні напруження  $\sigma_x$  виникають між навантаженнями, ближче до місця зосередження цих навантажень.

Напруження  $\sigma_z$  вздовж осі  $x$  на нижній межі шару

Наведені графіки дають картину розподілу напружень на межах шару та поверхні циліндричної порожнини, а також на перешийках між порожниною і межами шару. Максимальні напруження виникають на поверхні циліндричної порожнини та на верхній межі шару, де розташоване навантаження.

Подальші дослідження цього напрямку актуальні для шару з поздовжньою циліндричною трубою із заданими на граничних поверхнях напруженнями.

#### СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Гузь А.Н., Космодамианский А.С., Шевченко В.П. и др. Механика композитов. Том 7. Концентрация напряжений. Київ: Наук. думка. – 1998. – С. 114 – 137.
2. Vaysfel'd N., Popov G., Reut V. The axisymmetric contact interaction of an infinite elastic plate with an absolutely rigid inclusion. Acta Mech. 2015. vol. 226. P. 797–810. doi: <https://doi.org/10.1007/s00707-014-1229-7>
3. Попов Г.Я., Вайсфельд Н.Д. Осесимметричная задача теории упругости для бесконечной плиты с цилиндрическим включением при учете ее удельного веса. Прикладная механика. 2014. Т. 50, № 6. С. 27–38.
4. Bobyleva T. Approximate Method of Calculating Stresses in Layered Array / Procedia Engineering. – 2016. – Vol.153. – P.103 – 106. <https://doi.org/10.1016/j.proeng.2016.08.087>
5. Гринченко В.Т., Улитко А.Ф. Пространственные задачи теории упругости и пластичности. Равновесие упругих тел канонической формы. – Київ: Наук.думка. – 1985. – 280 с.
6. Гузь А.Н., Кубенко В. Д., Черевко М.А. Дифракция упругих волн. –Київ: Наук. Думка. – 1978. – 307 с.
7. Гринченко В.Т., Мелешко В. В. Гармонические колебания и волны в упругих телах. – Київ: Наук. Думка. – 1981. – 284 с.
8. Волчков В.В., Вуколов Д.С., Сторожев В.И. Дифракция волн сдвига на внутренних туннельных цилиндрических неоднородностях в виде полости и включения в упругом слое со свободными гранями/ Механика твердого тела. – 2016. – Вып. 46. – С. 119 – 133.
9. Николаев А.Г., Проценко В.С. Обобщенный метод Фурье в пространственных задачах теории упругости. – Харьков: Нац. аэрокосм. университет им. Н.Е. Жуковского «ХАИ», 2011. – 344 с.
10. Проценко В.С., Николаев А.Г. Пространственная задача Кирша / Математические методы анализа динамических систем. – 1982. – Вып. 6. – С. 3 – 11.
11. Проценко В.С., Українець Н.А. Применение обобщенного метода Фурье к решению первой основной задачи теории упругости в полупространстве с цилиндрической полостью / Вісник Запорізького національного університету. 2015. Вып. 2. С. 193–202.
12. Николаев А.Г., Орлов Е.М. Решение первой осесимметричной термоупругой краевой задачи для трансверсально-изотропного полупространства со сфероидальной полостью / Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій. – 2012. – Вып.20. – С. 253-259.
13. Miroshnikov V.Yu. First basic elasticity theory problem in a half-space with several parallel round cylindrical cavities / Journal of Mechanical Engineering. – 2018. – Vol. 21, № 2. – P. 12 – 18.
14. Protsenko V., Miroshnikov V. Investigating a problem from the theory of elasticity for a half-space with cylindrical cavities for which boundary conditions of contact type are assigned / Eastern-European Journal of Enterprise Technologies. – 2018. – Vol 4, № 7 (94). – P. 43 – 50.
15. Николаев А.Г., Танчик Е.А. Упругая механика многокомпонентных тел. – Харьков: Нац.аэрокосм.ун-т им. Н.Е. Жуковского «ХАИ». – 2014. – 272 с.
16. Miroshnikov V.Yu. The study of the second main problem of the theory of elasticity for a layer with a cylindrical cavity / Strength of Materials and Theory of Structures. – 2019. – №102. – P. 77–90. <https://doi.org/10.32347/2410-2547.2019.102.77-90>
17. Miroshnikov V.Yu., Medvedeva A.V., Oleshkevich S. V. Determination of the Stress State of the Layer with a Cylindrical Elastic Inclusion / Materials Science Forum. – 2019. – Vol. 968. – pp. 413-420. <https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/MSF.968.413>
18. Miroshnikov V. Investigation of the Stress Strain State of the Layer with a Longitudinal Cylindrical Thick-Walled Tube and the Displacements Given at the Boundaries of the Layer

/ Journal of Mechanical Engineering. – 2019. – Vol. 22, N 2. – P. 44-52.  
<https://doi.org/10.15407/jpmach2019.02.044>.

## REFERENCES

1. *Guz' A.N., Kosmodamianskiy A.S., Shevchenko V.P. and others.* Mekhanika kompozitov (Mechanics of composites). Vol 7. Kotsentratsiya napryazheniy (Concentration of stresses). Kiev: Nauk. Dumka. – 1998. – P. 114 – 137. (In Russian).
2. *Vaysfel'd N., Popov G., Reut V.* The axisymmetric contact interaction of an infinite elastic plate with an absolutely rigid inclusion / Acta Mech. – 2015. – vol. 226. – P. 797–810. doi: <https://doi.org/10.1007/s00707-014-1229-7>
3. *Popov G., Vaysfel'd N.* Osesimmetrichnaya zadacha teorii uprugosti dlya beskonechnoy plity s tsilindricheskim vklyucheniym pri uchete yeye udel'nogo vesa (The axisymmetric problem of the theory of elasticity for an infinite plate with a cylindrical inclusion, taking into account its specific gravity) / Prikladnaya mekhanika (Applied mechanics). – 2014. – Vol. 50, № 6. – P. 27–38.
4. *Bobyleva T.* Approximate Method of Calculating Stresses in Layered Array / Procedia Engineering. – 2016. – Vol.153. – P.103 – 106. <https://doi.org/10.1016/j.proeng.2016.08.087>
5. *Grinchenko V.T., Ulitko A.F.* Prostranstvennyye zadachi teorii uprugosti i plastichnosti. Ravnovesiye uprugikh tel kanonicheskoy formy (Spatial Problems of the Theory of Elasticity and Plasticity. Equilibrium of elastic bodies of canonical form). – Kiyev: Naukova Dumka. – 1985. – 280 p. (in Russian).
6. *Guz' A.N., Kubenko V.D., Cherevko M.A.* Difraktsiya uprugikh voln (Diffraction of elastic waves). – Kiev: Nauk. Dumka. – 1978. – 307 p. (In Russian).
7. *Grinchenko V.T., Meleshko V.V.* Garmonicheskiye kolebaniya i volny v uprugikh telakh (Harmonic vibrations and waves in elastic bodies). – Kiev: Nauk. Dumka. – 1981. – 284 p. (In Russian).
8. *Volchkov V.V., Vukolov D.S., Storogev V.I.* Difraktsiya voln sdviga na vnutrennikh tunnel'nykh tsilindricheskikh neodnorodnostyakh v vide polosti i vklyucheniya v uprugom sloye so svobodnymi granyami (Diffraction of shear waves by internal tunneling cylindrical non-homogeneities in the form of a cavity and inclusion in an elastic layer with free faces) / Mekhanika tverdogo tela (Solid mechanics). – 2016. – Vol. 46. – P. 119 – 133. (In Russian).
9. *Nikolaev A.G., Protsenko V.S.* Obobshchennyy metod Fur'ye v prostranstvennykh zadachakh teorii uprugosti (Generalized Fourier method in spatial problems of the theory of elasticity). – Kharkov: Nats. aerokosm. universitet im. N.Ye. Zhukovskogo «KHAL» (National Aerospace University "KhAI"), 2011. – 344 c. (In Russian).
10. *Protsenko V.S., Nikolaev A.G.* Prostranstvennaya zadacha Kirsha (Kirsch spatial problem) / Matematicheskiye metody analiza dinamicheskikh sistem (Mathematical methods for analyzing dynamic systems). – 1982. – Vol. 6. – P. 3 – 11. (In Russian).
11. *Protsenko V.S., Ukraineec N.A.* Primeneniye obobshchennogo metoda Fur'ye k resheniyu pervoy osnovnoy zadachi teorii uprugosti v poluprostranstve s tsilindricheskoy polost'yu (Application of the generalized Fourier method to the solution of the first main problem of the theory of elasticity in a half-space with a cylindrical cavity) / Visnyk Zaporiz'koho natsional'nogo universytetu (Bulletin of Zaporizhzhya National University). 2015. Vol. 2. P. 193–202. (In Russian).
12. *Nikolaev A.G., Orlov E.M.* Resheniye pervoy osesimmetrichnoy termouprugoy krayevoy zadachi dlya transversal'no-izotropnogo poluprostranstva so sferoidal'noy polost'yu (Solution of the first axisymmetric thermoelastic boundary value problem for a transversely isotropic half-space with a spheroidal cavity) / Problemy obchyslyval'noyi mekhaniky i mitsnosti konstrukttsiy (Problems of Computational Mechanics and Strength of Structures). – 2012. – Vol.20. – P. 253-259. (In Russian).
13. *Miroshnikov V.Yu.* First basic elasticity theory problem in a half-space with several parallel round cylindrical cavities / Journal of Mechanical Engineering. – 2018. – Vol. 21, № 2. – P. 12 – 18.
14. *Protsenko V., Miroshnikov V.* Investigating a problem from the theory of elasticity for a half-space with cylindrical cavities for which boundary conditions of contact type are assigned / Eastern-European Journal of Enterprise Technologies. – 2018. – Vol 4, № 7 (94). – P. 43 – 50.



15. *Nikolaev A.G., Tanchyk E.A.* Uprugaya mekhanika mnogokomponentnykh tel (Elastic mechanics of multicomponent bodies). – Kharkov: Nats. aerokosm. universitet im. N.Ye. Zhukovskogo «KHAU» (National Aerospace University "KhAI"). – 2014. – 272 p. (In Russian).
16. *Miroshnikov V. Yu.* The study of the second main problem of the theory of elasticity for a layer with a cylindrical cavity / Strength of Materials and Theory of Structures. – 2019. – №102. – P. 77–90. <https://doi.org/10.32347/2410-2547.2019.102.77-90>
17. *Miroshnikov V. Yu., Medvedeva A. V., Oleshkevich S. V.* Determination of the Stress State of the Layer with a Cylindrical Elastic Inclusion / Materials Science Forum. – 2019. – Vol. 968. – pp. 413–420. <https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/MSF.968.413>
18. *Miroshnikov V.* Investigation of the Stress Strain State of the Layer with a Longitudinal Cylindrical Thick-Walled Tube and the Displacements Given at the Boundaries of the Layer / Journal of Mechanical Engineering. – 2019. – Vol. 22, N 2. – P. 44 – 52. <https://doi.org/10.15407/pmach2019.02.044>

*Стаття надійшла 25.09.2019 р.*

*Miroshnikov V. Yu., Denisova T. V., Protsenko V. S.*

#### **INVESTIGATION OF THE FIRST MAIN PROBLEM OF THE THEORY OF ELASTICITY FOR A LAYER WITH A CYLINDRICAL CAVITY**

An analytic - numerical algorithm for solving a substantially spatial problem of the theory of elasticity for a layer with a longitudinal cylindrical cavity and the conditions of the first principal problem, given on the boundary surfaces, is developed.

The solution is based on the generalized Fourier method applied to the Lamé equation system. The cavity is considered in the cylindrical coordinate system, the layer - in Cartesian. By satisfying the boundary conditions and using special formulas for the transition between coordinate systems for basic solutions, we create infinite systems of linear algebraic equations, which are solved by the method of cutting. The numerical study of the determinant gives reason to claim that this system of equations has a single solution. As a result, stresses were obtained at different points in the elastic body.

Cutting parameters were chosen so that the accuracy of the boundary conditions reaches 10-2. As the cutoff parameter increases, the accuracy of boundary conditions increases, but the duration of the calculation increases.

The numerical solution of the problem is performed for a layer with a cylindrical cavity and a normal balanced load at the boundary of the layer. The analysis of the stress state gives grounds to state:

1. The solution of the algebraic system of equations can be found with any degree of accuracy by the method of reduction, which is confirmed by the high accuracy of boundary conditions.
2. The presence of a cavity gives rise to a redistribution of stresses, in which maximum values occur on the surface of the cavity, and tensile stresses occur at the top of the layer (which is compressed without a cavity).

This method can be used in the calculation of structures, the calculation scheme of which is a layer with a cylindrical cavity, under given boundary conditions in the form of balanced stresses. Stress analysis enables the selection of geometric characteristics at the initial design stage.

**Keywords:** cylindrical cavity in a layer; Lamé's equation; generalized Fourier method; infinite systems of linear algebraic equations.

*Мирошников В. Ю., Денисова Т. В., Проценко В. С.*

#### **ИССЛЕДОВАНИЕ ПЕРВОЙ ОСНОВНОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ СЛОЯ С ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ПОЛОСТЬЮ**

Решена пространственная задача теории упругости для слоя с продольной цилиндрической полостью, когда на границах слоя и на границе полости заданы напряжения. Решение задачи получено обобщенным методом Фурье относительно системы уравнений Ламе в цилиндрических координатах, связанных с цилиндром, и декартовых координатах, связанных с границами слоя. Бесконечные системы линейных алгебраических уравнений, полученные в результате удовлетворения граничных условий, решено методом редукции. В результате были получены напряжения в различных точках упругого тела. Проведен анализ напряженно - деформированного состояния слоя от воздействия уравновешенной нагрузки на его границах.

**Ключевые слова:** цилиндрическая полость в слое, уравнения Ламе, обобщенный метод Фурье, бесконечные системы линейных алгебраических уравнений.

УДК 539.3

*Мирошніков В.Ю., Денисова Т. В., Проценко В.С. Дослідження першої основної задачі теорії пружності для шару з циліндричною порожниною // Опір матеріалів і теорія споруд: наук.-техн. збірн. – К.: КНУБА, 2019. – Вип. 103. – С. 208-218.*

*Досліджено напружено – деформований стан шару з циліндричною порожниною, коли на межах шару та на межі порожнини задані напруження.*

Табл. 0. Іл. 5. Бібліогр. 18 назв.

UDC 539.3

*Miroshnikov V.Yu., Denisova T.V., Protsenko V.S. The study of the first main problem of the theory of elasticity for a layer with a cylindrical cavity // Strength of Materials and Theory of Structures: Scientific and technical collected articles. - Kyiv: KNUBA, 2019. - Issue 103. - P. 208-218. – Ukr.*

*The stress - deformed state of a layer with a cylindrical cavity is investigated, when stresses are specified at the boundaries of the layer and at the boundary of the cavity.*

Табл. 0. Fig. 5. Ref. 18.

УДК 539.3

*Мирошніков В.Ю., Денисова Т. В., Проценко В.С. Исследование первой основной задачи теории упругости для слоя с цилиндрической полостью // Сопроотивление материалов и теория сооружений: науч.-техн. сборн. - К.: КНУСА, 2019. - Вып. 103. - С. 208-218.*

*Исследовано напряженно - деформированное состояние слоя с цилиндрической полостью, когда на границах слоя и на границе полости заданы напряжения.*

Табл. 0. Ил. 5. Библиогр. 18 назв.

**Автор (вчена ступень, вчене звання, посада):** *Кандидат технічних наук, доцент, доцент кафедри будівельної механіки Харківського національного університету будівництва та архітектури Мирошніков Віталій Юрійович*

**Адреса робоча:** *61002, Україна, м. Харків, вул.Сумська 40, Харківський національний університет будівництва та архітектури, Мирошнікову Віталію Юрійовичу*

**Робочий тел.:** *+38 057 7062063*

**Мобільний. тел.:** *+38 067 7893333*

**E-mail:** *m0672628781@gmail.com*

**ORCID ID:** *http://orcid.org/0000-0002-9491-0181*

**Автор (вчена ступень, вчене звання, посада):** *Кандидат технічних наук, доцент кафедри вищої математики та економіко-математичних методів Харківського національного економічного університету імені Семена Кузнеця Денисова Тетяна Володимирівна*

**Адреса робоча:** *61166, Україна, м. Харків, пр. Науки, 9а, Харківський національний економічний університет імені Семена Кузнеця, Денисовій Тетяні Володимирівні*

**Мобільний. тел.:** *+380936997803*

**E-mail:** *tetiana.denysova@hneu.net*

**ORCID ID:** *http://orcid.org/0000-0001-7254-0901*

**Автор (вчена ступень, вчене звання, посада):** *Доктор фізико – математичних наук, професор кафедри математики та системного аналізу Національного аерокосмічного університету ім. Н.С. Жуковського «ХАІ» Проценко Володимир Сидорович*

**Адреса робоча:** *61070, Україна, м. Харків, вул. Чкалова 17, Національний аерокосмічний університет ім. Н.С. Жуковського «ХАІ», Проценко Володимир Сидоровичу*

**Мобільний. тел.:** *+38093 6433575*

**E-mail:** *prots\_vl@ukr.net*

**ORCID ID:** *http://orcid.org/0000-0001-9174-7617*

УДК 624.046.012.45: 539.376

## ДЕФОРМАЦІЙНИЙ РОЗРАХУНОК ПРОСТОРОВИХ ЗАЛІЗОБЕТОННИХ РАМ МСЕ З УРАХУВАННЯМ ВІБРОПОВЗУЧОСТІ БЕТОНУ

С.О. Слободянюк,  
д-р техн. наук, професор

А.П. Буратинський,  
канд. техн. наук

*ДВНЗ «Придніпровська державна академія будівництва та архітектури», м. Дніпро*

DOI: 10.32347/2410-2547.2019.103.219-234

Розглядається задача розрахунку просторової залізобетонної рами методом скінченних елементів (МСЕ) з урахуванням деформованої схеми та тривалих процесів – усадки, повзучості та віброповзучості бетону. Розрахунок з урахуванням деформованої схеми або деформацій поздовжнього згину називають ще деформаційним розрахунком. Отримано матриці жорсткості трьох типів скінченного елемента в місцевій системі координат, матрицю жорсткості всієї системи, розв'язок вирішуючого рівняння і алгоритм МСЕ. Наведено пропозиції по формулам автоматизованого розрахунку, а також приклад розрахунку просторової рами.

**Ключові слова:** просторова рама, матриця жорсткості, метод скінченних елементів, алгоритм, усадка, повзучість, віброповзучість бетону.

**Вступ.** Ефективність просторових рам або стержневих залізобетонних систем, які знайшли широке застосування як в цивільному так і в промисловому будівництві, в значній мірі залежить від правильно розрахованої конструктивної схеми. Якщо конструктивна схема (рама) виконана з залізобетону, то при різноманітних тривалих статичних і динамічних навантаженнях в рамках проявляється таке характерне явище як повзучість і віброповзучість бетону. Крім цього в просторових рамах необхідно врахувати деформації поздовжнього згину. Розрахунок з урахуванням деформацій поздовжнього згину або деформованої схеми більш коротко називають ще деформаційним розрахунком. Тому для деформаційного розрахунку стержневих залізобетонних систем з урахуванням повзучості і віброповзучості потрібна розробка методу, що дозволяє врахувати ці явища і автоматизувати процес розрахунку. Розробка будь-якого методу з повним урахуванням як зовнішніх навантажень, так і внутрішніх особливостей роботи матеріалу є завжди актуальною і проблемною. Нами для вирішення цієї проблеми був обраний основний метод будівельної механіки - метод скінченних елементів (МСЕ) з реалізацією в математичному пакеті (МП) «MathCad».

**1. Постановка задачі. Аналіз публікацій.** Розробити алгоритм розрахунку  $n$ -раз кінематично невизначених просторових залізобетонних рам з урахуванням деформацій поздовжнього згину, повзучості і віброповзучості на основі МСЕ та рекурентних формул, які дозволяють спростити й автоматизувати розрахунок стержневих систем на тривалі процеси - усадку, повзучість і віброповзучість бетону.

Розрахунку просторових стержневих систем в пружній постановці присвячено досить багато робіт. Тут згадаємо тільки деякі з них. Ступінь статичної невизначеності просторових рам настільки висока, що розрахунок їх звичайними методами вельми складний, а в багатьох випадках практично нездійсненний. У книзі Д.В. Вайнберга і В.Г. Чудновського [1] на основі аналізу особливостей, що впливають з геометричної конфігурації рами і відповідного перетворення навантаження, викладаються розрахунки рам на міцність, стійкість і коливання методом переміщень. Розглянуто прямокутні і косокутні, а також циклічно симетричні просторові рами. Розроблені аналогії, дозволили встановити зв'язок між задачами стійкості, динаміки і статички стержневих систем і об'єднати ці задачі одним спільним розв'язком. Дроздов П.Ф. [2] розрізняє дискретні, континуальні і дискретно-континуальні розрахункові моделі просторових несучих систем багатопверхових будинків. Вплив поздовжнього згину (так званий розрахунок за деформованою схемою) для моделей з абсолютно жорсткими зв'язками зсуву, враховується множенням значення сумарних згинальних моментів і бімоментів на коефіцієнт поздовжнього згину  $\varphi=1/[1-(\nu/\nu_{cr})]$ , де  $\nu$  - параметри поздовжніх сил. Немчинов Ю.І. [3] розробив метод скінченних елементів для розрахунку просторових конструкцій. Істотна економія при розрахунку просторових тонкостінних систем досягається шляхом введення просторових скінченних елементів і побудови матриці жорсткості, заснованої на поєднанні варіаційного методу Власова-Канторовича в матричній формі та МСЕ в класичній постановці. Дано виведення основних співвідношень МСЕ для тонкостінної просторової системи, рекомендованої для розрахунку широкого класу конструкцій. Наведено матриці жорсткості стиснуто-зігнутих балок на основі точного розв'язку. Що стосується класичного МСЕ, то він досить добре розроблений в роботах [4, 5, 6, 7] та інших.

Питання недеформаційного розрахунку систем МСЕ з урахуванням тривалих процесів були розглянуті Прокоповичем І.С. і Яременко О.Ф. [8], Євзеровим І.Д. [9]; Кубанешвілі А.С., Менагарішвілі З. Р., Тушішвілі З.І. [10]; Яценко Є.А., Корніловою С.В., Бовіним А.А. [11] та іншими. Дослідженню стійкості стержня в умовах повзучості за допомогою МСЕ присвячені роботи Колева П. [12], Белкіна В.П. і Каледіна В.О. [13] та інших.

По деформаційному розрахунку просторових стержневих залізо-бетонних систем МСЕ з урахуванням усадки і повзучості присвячені перші роботи [14, 15], а з урахуванням віброповзучості даних в літературі не виявлено.

## **2. Матриця жорсткості елемента в місцевій системі координат.**

Розглянемо прямолінійний стержень довільного перетину, що складається з бетону площею  $A_0$ , початковим модулем пружності бетону  $E_0$  і  $e = 1, 2, \dots, s$  стержнів звичайної і попередньо напруженої арматури з площею перетину кожного  $e$ -го стержня  $A_e$  і модулем пружності  $E_e$ . Нехай в загальному випадку стержень сприймає всі види навантажень - згин у двох площинах, розтяг-стиск і кручення. Вузли  $i, j$  елемента розміщені на кінцях. Місцеву систему координат виберемо так, щоб вісь  $x$  збігалася з

поздовжньою віссю стержня, а осі  $y$  і  $z$  збігалися з головними центральними осями його приведенного поперечного перерізу.

У кожному вузлі будемо розглядати 6 компонент переміщень: 3 лінійних ( $v$ ) і 3 кутових ( $\theta$ ) відносно до відповідних осей, а також відповідні їм силові фактори  $V$  і  $M$ . Кінематичні і статичні характеристики стержня будемо відзначати нижнім подвійним індексом, де перший індекс буде вказувати на вузол, а другий - на вісь місцевої системи координат стержня. Позитивні кінематичні та статичні характеристики стержня з урахуванням його просторової роботи і поздовжнього стиснення ( $P$ ) показані на рис. 1.

Побудуємо матрицю жорсткості II типу. Нехай на лівому ( $i$ ) кінці стержня буде шарнір, а на правому ( $j$ ) - защемлення. Шарнірне опирання стержня буде таким, що допускає вигин у двох взаємно перпендикулярних площинах  $xy$  і  $xz$ , але крученню щодо поздовжньої осі  $xx$  перешкоджає. При побудові матриці врахуємо той факт, що в більшості випадків поздовжні сили і круті моменти постійні у межах скінченного елемента. Тому у вузлах  $i$  та  $j$  стержня ці сили однакові, але в різні боки спрямовані. Позитивні напрямки кінематичних та статичних характеристик стержня з урахуванням його просторової роботи і поздовжнього стиснення ( $P$ ) показані на рис. 2. Всі характеристики є функціями часу (аргументи  $t$  опущені).

Припускаємо, що у вибраній місцевій системі координат вузлові сили розпадаються на чотири групи, які можна розглядати незалежно один від одного. Група "а" являє собою вузлові сили ( $V_{iy}, V_{jy}, M_{jz}$ ), які визивають вигин стержня тільки в площині  $xy$  ( $v_{iy}, v_{jy}, \theta_{jz}$ ). Група "b" ( $V_{iz}, V_{jz}, M_{jy}$ ) – вигин в площині  $xz$  ( $v_{iz}, v_{jz}, \theta_{jy}$ ), група "c" ( $V_{jx}$ ) – поздовжні деформації ( $v_{jx}$ ), а група "d" ( $M_{jx}$ ) – деформації кручення ( $\theta_{jx}$ ). Такий груповий підхід до розташування

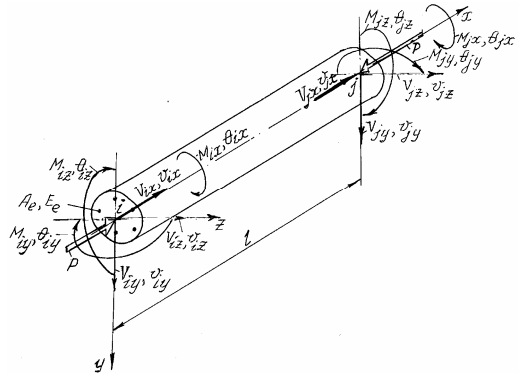


Рис. 1. Характеристики просторового стержня I типу

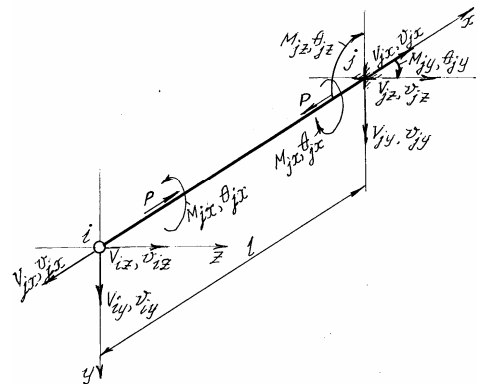


Рис. 2. Характеристики просторового стержня II типу

компонентів зусиль  $\bar{S}$  і переміщень  $\bar{v}$  дозволяє матрицю жорсткості просторового стержня (r) сформувати в блочно-діагональному вигляді.

Кожен блок на головній діагоналі матриці являє собою підматрицю окремої групи, яка характеризує плоский напружений стан. Плоскі задачі даних чотирьох груп нами вирішені [16] і їх результати наступні:

$$r_{\alpha} = \frac{3E_0I_z}{l^3} \begin{array}{|c|c|c|} \hline \eta_1(v_{\alpha}) & -\eta_1(v_{\alpha}) & \varphi_1(v_{\alpha})l \\ \hline -\eta_1(v_{\alpha}) & \eta_1(v_{\alpha}) & -\varphi_1(v_{\alpha})l \\ \hline \varphi_1(v_{\alpha})l & -\varphi_1(v_{\alpha})l & \varphi_1(v_{\alpha})l^2 \\ \hline \end{array} F_{\alpha}(t), \quad (1)$$

$$r_b = \frac{3E_0I_y}{l^3} \begin{array}{|c|c|c|} \hline \eta_1(v_b) & -\eta_1(v_b) & \varphi_1(v_b)l \\ \hline -\eta_1(v_b) & \eta_1(v_b) & -\varphi_1(v_b)l \\ \hline \varphi_1(v_b)l & -\varphi_1(v_b)l & \varphi_1(v_b)l^2 \\ \hline \end{array} F_b(t), \quad (2)$$

$$r_c = \frac{E_0A}{l} \cdot F_c(t), \quad (3)$$

$$r_d = \frac{G_0I_{kp}}{l} \cdot F_d(t). \quad (4)$$

В підматрицях  $r_a$  та  $r_b$  позначено:  $E_0I_z$  і  $E_0I_y$  - згинаюча жорсткість приведенного перерізу стержня щодо осі  $z$  і  $y$  відповідно;  $\varphi_1(v)$  та  $\eta_1(v)$  - спеціальні тригонометричні функції, що враховують деформації поздовжнього згину при аргументах  $v_a = l\sqrt{\frac{P}{E_0I_z}}$  і  $v_b = l\sqrt{\frac{P}{E_0I_y}}$ ;  $F_a(t) = L_a \cdot 1$  й  $F_b(t) = L_b \cdot 1$  - тимчасові функції впливу повзучості-віброповзучості бетону при згині в площині  $xy$  і  $xz$ . В підматрицях  $r_c$  та  $r_d$  позначено:  $E_0A$  і  $G_0I_{kp}$  - поздовжня жорсткість і жорсткість при крученні приведенного перерізу стержня відповідно;  $F_c(t) = L_c \cdot 1$  і  $F_d(t) = L_d \cdot 1$  - тимчасові функції впливу повзучості-віброповзучості бетону при осьовій деформації і крученні. Тут  $L_a = \Gamma_a^{-1}K_a$ ,  $L_b = \Gamma_b^{-1}K_b$ ,  $L_c = T_c^{-1}K_c$  і  $L_d = \Lambda^{-1}K_d$  - узагальнені оператори повзучості-віброповзучості відповідних підматриць, які можуть бути інтегральними, диференціальними або матричними.

Формули (1) - (4) визначають матрицю жорсткості II типу просторового залізобетонного стержня постійної жорсткості в місцевій системі координат. Матриці жорсткості стержнів I типу та III (з шарнірними кінцями) типу і детальний опис метода начальних параметрів віброповзучості бетону наведені в роботах авторів [16 і 17].

**3. Матриця жорсткості всієї системи.** Рівняння рівноваги вузлів розрахункової моделі стержневої системи в матричній формі МСЕ представляється у вигляді:

$$R\bar{Z} - \bar{P} = 0, \quad (5)$$

де  $R$  - квадратна симетрична матриця жорсткості всієї системи;  $\bar{P}$  - вектор-стовпець зовнішнього навантаження. Існують різні способи формування матриці  $R$ . Одним з них є спосіб формування її через матриці жорсткості окремих стержнів  $r_g$  у вигляді:

$$R = \sum_{g=1}^k r_g^s; \quad r_g^s = \lambda_a^T r_a \lambda_a + \lambda_b^T r_b \lambda_b + \lambda_c^T r_c \lambda_c + \lambda_d^T r_d \lambda_d \equiv \lambda_g^T r_g \lambda_g. \quad (6)$$

Для прямокутних систем без похилих стержнів матриці перетворення координат  $\lambda_g$  вельми нераціональні при розгляді систем з багатьма параметрами переміщень, так як в основному наповнюються нулями і тільки в деяких осередках ставлять одиниці. Тому замість цих матриць застосовують більш компактні таблиці індексів, складання яких базується на наступних міркуваннях.

Матриця  $\lambda_g$  вживається в поєднанні  $\lambda_g^T r_g \lambda_g$ , де  $r_g$  - матриця жорсткості скінченного елемента в місцевій (локальній) системі координат. В даному сполученні процедура перемноження виявляє в матриці  $r_g$  ті елементи, які відповідають номеру стовпця матриці  $\lambda_g^T$  і номеру рядка матриці  $\lambda_g$ , в яких стоять одиниці. Ці номери стовпця і рядка матриці  $r_g$  - є індекси елементів цієї матриці. Таким чином, для нас важливими є індекси елементів матриці  $r_g$ , а не самі матриці. Саме ці індекси заносяться у відповідну таблицю.

Структурно таблиця індексів складається із стовпців, номер якого збігається з параметром переміщення системи  $Z_k$ , і рядків, що відповідають номеру скінченного елемента  $g$  при  $g=\kappa=1,2, \dots, n$ . Щоб заповнити рядки таблиці, необхідно окремий елемент перенести на місце елемента  $g$  системи і простежити за тим, які параметри  $\vec{V}_g$  збігаються з параметрами  $Z_k$  і їх ставлять у відповідні клітинки рядка. Якщо збігів немає, то в таблиці індексів ставлять нулі. Крім того, таблиця індексів дає можливість перевести загальні (глобальні) переміщення  $\vec{Z}$  в місцеву (локальну) систему координат у відповідності з формулою  $\vec{V}_g = \lambda_g \vec{Z}$ .

Таким чином, таблиця індексів дозволяє звести кількість матричних операцій до мінімуму.

**4. Розв'язок вирішуючого рівняння. Алгоритм МСЕ.** Вирішуючи рівняння МСЕ (5) з урахуванням тривалих процесів та просторової роботи є складним рівнянням і його чисельна реалізація ускладнена. Справа в тому, що елементи матриці жорсткості всієї системи включають як числа, так і різні оператори повзучості-віброповзучості. Тому потрібно спочатку вирішити це рівняння в універсальній операторній формі, отримати рекурентні формули і тільки по них одержати чисельний результат.

Найбільш підходящим методом, на наш погляд, для вирішення цього складного завдання є метод Халецького [18] або так званий метод квадратного кореня. Суть його полягає в наступному.

Кожну матрицю можна представити у вигляді добутку двох матриць:  $R = L \cdot M$ , де  $L$  та  $M$  - нижня і верхня трикутні матриці відповідно. Для симетричної матриці  $R$  матриця  $L$  дорівнює транспонованій матриці  $M$ , тобто  $L = M^T$ . Якщо вирішуюче рівняння МСЕ представити у вигляді  $R\vec{Z} = \vec{P}$ , то згідно з методом Халецького його можна замінити рівнянням  $M^T M \vec{Z} = \vec{P}$  і розбити його рішення на два рівняння. Для першої системи рівнянь рекурентні формули мають вигляд:

$$y_1 = \frac{P_1}{m_{11}}, y_n = \frac{1}{m_{nn}} [P_n - \sum_{s=1}^{s=n-1} m_{sn} y_s], n = 2, 3, \dots, n, \quad (7)$$

а для другої –

$$Z_n = \frac{y_n}{m_{nn}}, Z_i = \frac{1}{m_{ii}} [y_i - \sum_{s=i+1}^{s=n} m_{is} Z_s], i = (n-1), (n-2), \dots, 1. \quad (8)$$

Подальше вирішення задачі за даними рекурентним формулами вже не викликає ускладнень.

Класичний МСЕ загальновідомий, а блок-схема алгоритму деформаційного розрахунку МСЕ у пружній постановці і з урахуванням тривалих процесів наступна:

Пункти блок-схеми алгоритму МСЕ	Деформаційний пружний розрахунок	Деформаційний розрахунок з урахуванням повзучості та віброповзучості
1. Формування вихідних матриць	$\vec{Z}, \vec{P}, \vec{S}_g, \vec{S}_g^*, r_g, a_g$	$\vec{Z}(t), \vec{P}(t), \vec{S}_g(t), \vec{S}_g^*(t), r_g(t), a_g$
2. Матриці жорсткості g-го КЕ в глобальній системі координат	$r^g = a_g^T r_g a_g$	$r^g(t) = a_g^T r_g(t) a_g$
3. Матриці жорсткості всієї системи	$R = \sum_{g=1}^k r^g$	$R(t) = \sum_{g=1}^k r^g(t)$
4. Вектор вузлових переміщень системи	$\vec{Z} = R^{-1} \vec{P}$	$\vec{Z}(t) = R(t)^{-1} \vec{P}(t)$
5. Вектор вузлових зусиль g-го КЕ в місце-вій системі координат всього навантаження	$\vec{S}_g^* = r_g a_g \vec{Z} + \vec{S}_g$	$\vec{S}_g^*(t) = r_g(t) a_g \vec{Z}(t) + \vec{S}_g(t)$

Загальний алгоритм МСЕ таких конструкцій йде від простого до складного: 1) недеформаційний розрахунок (класичний МСЕ); 2) деформаційний пружний розрахунок (з урахуванням деформацій



поздовжнього згину стержнів системи); 3) деформаційний розрахунок з урахуванням усадки і повзучості; 4) деформаційний розрахунок з урахуванням віброповзучості бетону.

**5. Визначення напружень по зусиллям і перехід до формул ДБН.** За обчисленими внутрішніми зусиллями можна визначити значення поточних напружень в арматурі і бетоні в будь-який момент часу  $t$ . Умовно будемо вважати, що при деформаційному розрахунку методом скінчених елементів найбільші зусилля будуть у вузлах скінчених елементів і відповідно найбільші напруження. У рамках МСЕ цього легко добитися відповідною розбивкою стержневої залізобетонної системи на скінченні елементи.

Визначення формул для напружень в бетоні та арматурі просторового елемента. Вважається справедливою узагальнена для залізобетонних просторових стержнів гіпотеза плоских перетинів, яка в будь-який момент часу виражається співвідношенням:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_e &= \varepsilon + \chi_z y + \chi_y z; \\ \varepsilon_e &= \varepsilon + \chi_z y_e + \chi_y z_e; \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

де  $\varepsilon \equiv \varepsilon(x, t)$  - поздовжня деформація осі елемента;  $\chi_z \equiv \chi_z(x, t) \approx -\frac{d^2 y}{dx^2}$ ;

$\chi_y \equiv \chi_y(x, t) \approx -\frac{d^2 z}{dx^2}$  - кривизни вигину елемента відносно осей  $z$  і  $y$

відповідно. Поздовжня осьова деформація і кривизни вигину - це параметри, які повністю визначають положення площини поперечного перерізу стержневого просторового елемента при тривалому його деформуванні. Внутрішні зусилля розподіляються між бетоном і арматурою, які запишемо у розгорнутому вигляді:

$$\left. \begin{aligned} N &= \int_{A_g} \sigma_e dA_g + \sum_{e=1}^s \sigma_e A_e; \\ M_z &= \int_{A_g} \sigma_e z dA_g + \sum_{e=1}^s \sigma_e A_e z_e; \\ M_y &= \int_{A_g} \sigma_e y dA_g + \sum_{e=1}^s \sigma_e A_e y_e. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Детальний хід отримання всіх формул опускаємо (див. [16]) і покажемо зразу співвідношення між компонентами деформацій і зусиль просторового елемента:

$$\left. \begin{aligned} K\varepsilon &= \Lambda(T_e \varepsilon^* + \mathcal{K}_e \chi_z^* + \Gamma_e \chi_y^*) + V(T_e \varepsilon_u^* + \mathcal{K}_e \chi_{uz}^* + \Gamma_e \chi_{uy}^*); \\ K\chi_z &= \Lambda(T_z \varepsilon^* + \mathcal{K}_z \chi_z^* + \Gamma_z \chi_y^*) + V(T_z \varepsilon_u^* + \mathcal{K}_z \chi_{uz}^* + \Gamma_z \chi_{uy}^*); \\ K\chi_y &= \Lambda(T_y \varepsilon^* + \mathcal{K}_y \chi_z^* + \Gamma_y \chi_y^*) + V(T_y \varepsilon_u^* + \mathcal{K}_y \chi_{uz}^* + \Gamma_y \chi_{uy}^*); \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

де деформації пружного залізобетону від зовнішнього навантаження і умовного усадочного навантаження рівні:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon^* &= \frac{N}{E_0 A}; \chi_z^* = \frac{M_z}{E_0 I_z}; \chi_y^* = \frac{M_y}{E_0 I_y}; \\ \varepsilon_u^* &= \frac{N_u}{E_0 A}; \chi_{uz}^* = \frac{M_{uz}}{E_0 I_z}; \chi_{uy}^* = \frac{M_{uy}}{E_0 I_y}; \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

а узагальнені оператори повзучості-віброповзучості мають вигляд:

$$\begin{aligned} K &= B_\mu B_{\lambda z} B_{\lambda y} - (\lambda_{zy} \lambda_{yz} B_\mu + e_{sy} \eta_y B_{\lambda z} + e_{sz} \eta_z B_{\lambda y}) W^2 + (e_{sz} \eta_y \lambda_{zy} + e_{sy} \eta_z \lambda_{yz}) W^3 \\ &; \\ T_\varepsilon &= B_{\lambda z} B_{\lambda y} - \lambda_{zy} \lambda_{yz} W^2; \mathcal{K}_\varepsilon = (e_{sy} \lambda_{yz} W - e_{sz} B_{\lambda y}) W; \\ \Gamma_\varepsilon &= (e_{sz} \lambda_{zy} W - e_{sy} B_{\lambda z}) W; T_z = (\eta_y \lambda_{zy} W - \eta_z B_{\lambda y}) W; \\ \mathcal{K}_z &= B_\mu B_{\lambda y} - e_{sy} \eta_y W^2; \Gamma_\varepsilon = (e_{sy} \lambda_{yz} W - e_{sz} B_{\lambda y}) W; \\ T_y &= (\eta_z \lambda_{yz} W - \eta_y B_{\lambda z}) W; \mathcal{K}_y = (\eta_y e_{sz} W - \lambda_{yz} B_\mu) W; \Gamma_y = B_\mu B_{\lambda z} - e_{sz} \eta_z W^2. \end{aligned} \quad (13)$$

Для визначення нормальних напружень в бетоні та арматурі отримаємо формули:

$$K \Lambda \sigma_\varepsilon = V(\sigma_{ep} + \sigma_{eu} - K \sigma_u); \quad K \sigma_\varepsilon = \sigma_{ep} + \sigma_{eu} \quad (14)$$

при

$$\begin{aligned} \sigma_{ep} &= E_0 \Lambda (H_{6e} \varepsilon^* + H_{6z} \chi_z^* + H_{6y} \chi_y^*); \sigma_{ep} = E_e \Lambda (H_{e\varepsilon} \varepsilon^* + H_{ez} \chi_z^* + H_{ey} \chi_y^*); \\ \sigma_{eu} &= E_0 V (H_{6e} \varepsilon_u^* + H_{6z} \chi_{uz}^* + H_{6y} \chi_{uy}^*); \sigma_{eu} = E_e V (H_{e\varepsilon} \varepsilon_u^* + H_{ez} \chi_{uz}^* + H_{ey} \chi_{uy}^*); \\ \sigma_u &= E_0 \varepsilon_u, \end{aligned} \quad (15)$$

де

$$\begin{aligned} H_{6e} &= T_\varepsilon + y T_z + z T_y; \quad H_{e\varepsilon} = T_\varepsilon + y_e T_z + z_e T_y; \quad H_{6z} = \mathcal{K}_\varepsilon + y \mathcal{K}_z + z \mathcal{K}_y; \\ H_{ez} &= \mathcal{K}_\varepsilon + y_e \mathcal{K}_z + z_e \mathcal{K}_y; \quad H_{6y} = \Gamma_\varepsilon + y \Gamma_z + z \Gamma_y; \quad H_{ey} = \Gamma_\varepsilon + y_e \Gamma_z + z_e \Gamma_y. \end{aligned} \quad (16)$$

При розрахунку симетрично армованих стержневих просторових елементів вищенаведені формули для напружень різко спрощуються, оскільки при  $S_{sy} = S_{sz} = 0$  та  $J_{s,zy} = J_{s,yz} = 0$ :

$$\eta_z = \eta_y = 0; \quad e_{sz} = e_{sy} = \lambda_{zy} = \lambda_{yz} = 0; \quad S_{6y} = S_{6z} = 0; \quad M_{uy} = M_{uz} = 0.$$

Таким чином, нормальні напруження в арматурі  $\sigma_\varepsilon(t)$  і бетоні  $\sigma_\varepsilon(t)$  просторового елемента визначаються за формулами (14 - 16) при відомих згинаючих моментах  $M_\phi(t)$  і поздовжніх силах  $N_\phi(t)$ .

Дані про поточні нормальні напруження в арматурі і бетоні використовуються для визначення втрат попереднього напруження в арматурі, які у відповідності з теорією власних напружень акад. С.А. Яценко [19] визначаються за формулою:

$$\sigma_{loss2e}(t) = \sigma_\varepsilon(t) - \alpha_e(t) \cdot \sigma_\varepsilon(x_e, t), \quad x \equiv y, z. \quad (17)$$

У даній формулі  $\sigma_\varepsilon(t)$  і  $\sigma_\varepsilon(x_e, t)$  - сума збільшень напружень в арматурі і бетоні, викликаних дією зусиль попереднього напруження арматури, усадки (набухання) бетону і тривалого зовнішнього

навантаження;  $\alpha_e(t) = E_e/E_g(x_e, t)$  - відношення модулів пружності арматури до бетону в розрахунковий момент часу  $t$ .

Рівнодіюча власних напружень  $P(t)$  і її ексцентриситети  $e_{0p,y}(t)$  та  $e_{0p,z}(t)$  визначаються за формулами:

$$\left. \begin{aligned} P(t) &= \sum_{e=1}^s [\sigma_{con1} + \sigma_{loss2e}(t)] A_e; \\ e_{0p,y}(t) &= \frac{\sum_{e=1}^s [\sigma_{con1} + \sigma_{loss2e}(t)] A_e y_e}{P(t)}; \\ e_{0p,z}(t) &= \frac{\sum_{e=1}^s [\sigma_{con1} + \sigma_{loss2e}(t)] A_e z_e}{P(t)}. \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

За формулами (18) здійснюється перехід від розрахунків поточних значень внутрішніх зусиль і напружень стержневих залізобетонних систем з урахуванням просторової роботи, деформацій поздовжнього згину і тривалих процесів до розрахункових формул державних будівельних норм [20].

#### 6. Пропозиції по формулам для автоматизації розрахунків.

Аналогічний результат розрахунку стержневої системи можна отримати, використовуючи формули для автоматизації і спрощення цих складних розрахунків, які ми назвали рекурентними формулами. Ці формули отримані на основі принципу Вольтерра і такої робочої гіпотези - у вирішення тривалого переміщення (зусилля) функція часу повинна входити як множник при вираженні пружного переміщення (зусилля). Тривалі переміщення:

$$z_i(t) = z_i^* F_i(t), \quad i = 1, 2, \dots, n - \text{невідомих}, \quad (19)$$

де  $z_i^*$  - пружне  $i$ -е переміщення, а  $F_i(t)$  - функція часу для  $i$ -го переміщення. Ця функція враховує повзучість-віброповзучість системи і визначається за такою рекурентною формулою:

$$F_i(t) = \frac{D_i^*}{D_i} [D(t)]^{-1} [D_i(t)], \quad (20)$$

де  $D^*$  - пружний визначник системи,  $[D(t)]^{-1}$  - зворотна матриця визначника системи в часі,  $D_i^*$  - пружний визначник для  $i$ -го переміщення,  $[D_i(t)]$  - матричний визначник для  $i$ -го переміщення в часі.

Тривалі зусилля:

$$S_j(t) = S_j^* T_j(t), \quad (21)$$

де  $T_j(t)$  - функція часу для  $j$ -го рядка вектору вузлових зусиль  $g$ -го СЕ. Вона враховує повзучість-віброповзучість системи та визначається затакою рекурентною формулою:

$$T_j(t) = (1 - \frac{S_j^n}{S_j^*})(L_g 1) + \frac{\Delta S_j^{\Delta z}(t)}{S_j^*} + \frac{S_j^n(t)}{S_j^*}, \tag{22}$$

де  $S_j^*$  - зусилля пружного деформаційного розрахунку,  $S_j^n$  - зусилля

пружне від невузлового навантаження,  $S_j^n(t)$  - тимчасове зусилля від невузлового навантаження, та прирощення зусилля від повзучості-віброповзучості, яке знаходиться з розв'язку матричного рівняння:

$$\Delta \bar{S}_g^{\Delta z}(t) = r_g^* a_g L_g \Delta \bar{z}(t), \tag{23}$$

де позначено

$$\Delta \bar{z}(t) = \overline{z_i^*(F_i(t) - 1)}.$$

При розрахунку виходимо з того, що всі пружні розв'язки МСЕ вже отримані і нам відомі всі вектори переміщень та зусиль недеформаційного і деформаційного пружних розрахунків. Подальший розрахунок з урахуванням тривалих процесів можна виконати більш просто, використовуючи рекурентні формули (20 – 23). На ці формули нами отримано авторське свідоцтво № 52720 від 20.12.2013р.

**7. Приклад розрахунку.**

Розглянемо просторову залізобетонну раму з симетрично армованими елементами при дії на неї постійних у часі просторових сил:  $q = 10$  кН/м - рівномірно розподіленого навантаження і  $P = 500$  кН - вузлових стискаючих сил, та без утворення тріщин. Розрахункова схема і основна система методу переміщень рами представлена на рис. 3.

Нехай поперечні перерізи I скінченного елемента і II, III елемента будуть виконані згідно рис. 4,(а) і рис. 4,(б) відповідно.

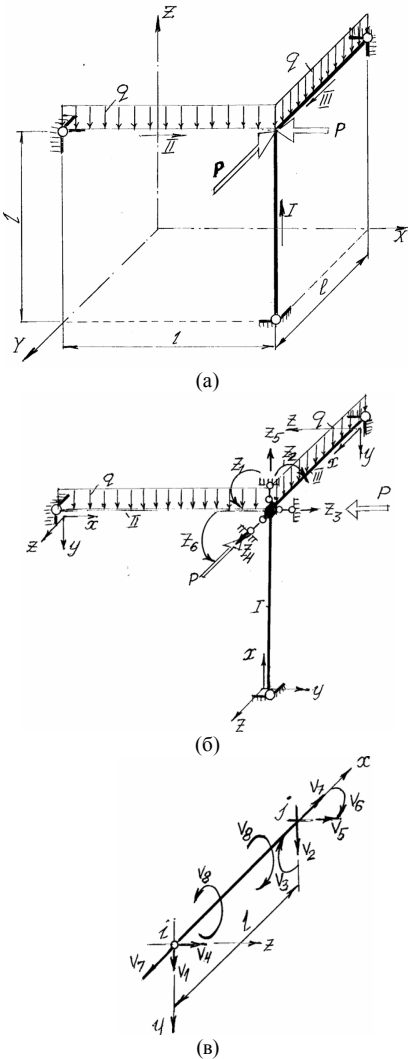


Рис. 3. До прикладу: (а) - розрахункова схема; (б) - основна система методу переміщень; (в) - скінченний елемент

Поперечні перерізи виконані з бетону класу С55/60 (В60) з початковим модулем  $E_0=36$  ГПа,  $G_0=15$  ГПа і арматури, що складається з симетрично розташованих 4-х стержнів  $\varnothing 22$  мм, класу А240 (А-III) з модулем  $E_e=200$  ГПа,  $G_e=80$  ГПа і загальною площею  $A_e=0,152 \cdot 10^{-2} \text{ м}^2$ .

Розрахунок будемо виконувати згідно

схеми алгоритму МСЕ деформаційного розрахунку залізобетонних стержневих систем з урахуванням тривалих процесів (дивись п. 4) в МП «MathCad».

Розрахункова схема МСЕ представлена на рисунку 5.

Детальний розрахунок даної просторової рами по вищенаведеному алгоритму представлений у роботі авторів [16], а тут покажемо зразу результати розрахунків у вигляді епюр внутрішніх зусиль рами (рис. 6).

Програма, алгоритм та результати розрахунку рами з шістьма невідомими по рекурентним формулам (20 – 23) також були реалізовані в МП «MathCad». По цим формулам був виконаний розрахунок рами і результати повністю збіглися з результатами отриманими по МСЕ, а тому ми рекомендуємо використовувати ці рекурентні формули для спрощення та автоматизованого розрахунку просторових стержневих систем з урахуванням тривалих процесів - усадки, повзучості і віброповзучості бетону.

Аналіз розрахунку залізобетонної просторової рами показав, що врахування деформацій поздовжнього згину стержнів і повзучості-віброповзучості бетону значно видозмінюють напружено-деформований стан просторових систем. Так, наприклад, деякі переміщення рами зростають у часі на 135-348%, а зміна зусилля коливається від +88% до -231% в порівнянні з пружними значеннями не деформаційного розрахунку. На зростання переміщень основний вплив має повзучість та віброповзучість, частка яких складає відповідно: 135% - 184% та 228% - 338%, а на зростання зусиль – деформації поздовжнього згину, частка яких складала від +10% до -228%.

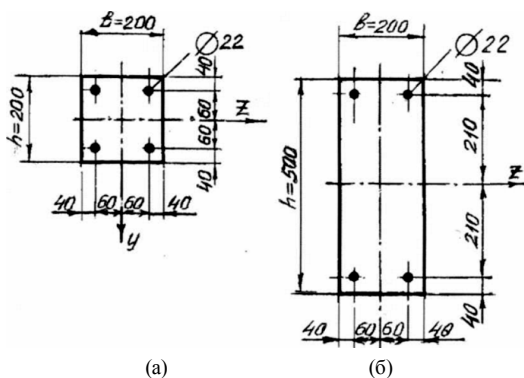


Рис. 4. Поперечні перерізи I (а) і II, III (б) скінчених елементів

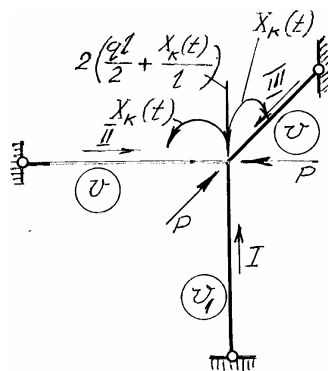


Рис. 5. Розрахункова схема МСЕ

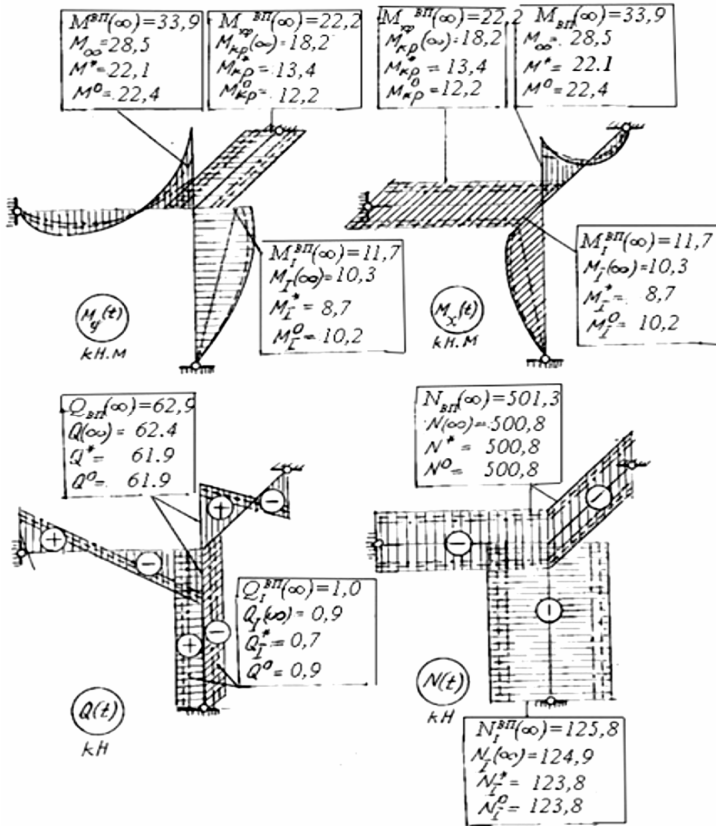


Рис. 6. Епюри внутрішніх зусиль просторової рами

**Висновки**

1. Виконані дослідження дозволили отримати матрицю жорсткості трьох типів залізобетонного просторового скінченного елемента в місцевій системі координат з урахуванням деформацій поздовжнього згину і тривалих процесів - усадки, повзучості і віброповзучості бетону.
2. Отримано матрицю жорсткості всієї залізобетонної стержневої системи за допомогою таблиці індексів і розв'язок вирішуючого рівняння МСЕ на базі методу Халецького.
3. Все це дозволило вперше розробити алгоритм розрахунку залізобетонних стержневих систем з урахуванням просторової роботи, деформацій поздовжнього згину, усадки, повзучості і віброповзучості бетону методом скінчених елементів.
4. Були розроблені і використані рекурентні формули для розрахунку n-раз кінематично невизначених просторових залізобетонних рам на тривалі процеси, які значно спрощують і автоматизують ці складні розрахунки. На їх основі можуть бути розроблені підпрограми для великих розрахункових

комплексів (по аналогії, як це було зроблено в математичному пакеті «MathCad») для розрахунку просторових рам.

5. Виконаний приклад розрахунку залізобетонної просторової рами показав, що врахування деформацій поздовжнього згину стержнів і повзучості-віброповзучості бетону значно видозмінюють напружено-деформований стан просторових систем. Деякі переміщення рами зростають у часі на 135-348%, а зміна зусилля коливається від +88% до -231% в порівнянні з пружними значеннями не деформаційного розрахунку. На зростання переміщень основний вплив має повзучість та віброповзучість, частка яких складає відповідно: 135% -184% та 228% -338%, а на зростання зусиль – деформації поздовжнього згину, частка яких складала від +10% до -228%.

6. Зазначені особливості та відсотки зміни у часі переміщень і зусиль, переконливо доводять необхідність виконання розрахунків залізобетонних стержневих систем з урахуванням просторової роботи, деформацій поздовжнього згину і повзучості-віброповзучості.

7. Деформаційні розрахунки стержневих залізобетонних систем слід виконувати не тільки для встановлення зміни картини внутрішніх зусиль та переміщень у часі, а й необхідно в найнебезпечніших місцях системи визначати напруження в арматурі і бетоні та прогини, щоб не допустити перевищення розрахункових опорів матеріалів та нормативних переміщень за весь період експлуатації споруди.

8. В цілому побудовано теорію деформаційного розрахунку стержневих залізобетонних систем з урахуванням тривалих процесів, яка рекомендується для впровадження в практику проектування просторових стержневих залізобетонних конструкцій.

#### СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Вайнберг Д.В., Чудновский В.Г.* Расчет пространственных рам. - К.: Госстройиздат УССР, 1964. - 308 с.
2. *Дроздов П.Ф.* Конструирование и расчет несущих систем многоэтажных зданий и их элементов. – М.: Стройиздат, 1977. - 223 с.
3. *Немчинов Ю.И.* Расчет пространственных конструкций (метод конечных элементов). - К.: Будівельник, 1980. - 232 с.
4. *Баженов В.А., Сахаров А.С., Мельниченко Г.И.* Метод конечных элементов в задачах строительной механики. - К.: КГТУСА, 1994.- 368 с.
5. *Варвак П.М., Бузун И.М., Городецкий А.С.* Метод конечных элементов. – К.: Вища школа, 1981. - 176 с.
6. *Масленников А.М.* Расчет строительных конструкций методом конечных элементов. - Л.: ЛИСИ, 1977. - 80 с.
7. *Исханов Г.В., Гранат С.Я., Мельниченко Г.И.* Строительная механика: Расчет стержневых систем на ЭВМ. – К.: Вища школа, 1990. – 229 с.
8. *Прокопович И.Е., Яременко А.Ф.* Применение метода конечных элементов к решению задач линейной теории ползучести // Строит. мех. и расчет сооружений, № 6, 1982. - С. 29-33.
9. *Евзеров И.Д.* Метод конечных элементов при расчете на длительное действие нагрузки // Сопроотивление материалов и теория сооружений, вып. 56. - К.: Будівельник, 1990. -С. 98-103.
10. *Кубанешвили А.С., Менагаршвили З.Р., Тушишвили З.И.* Применение МКЭ к расчету ЖБК с учетом ползучести бетона // Бетон и жб. в энерг. стр-ве. Матер. Всесоюз. конф. по бет. и жб. Казань, окт.,1988. - Тбилиси, 1988. - С.94-98.
11. *Яценко Е.А., Корнилова С.В., Бовин А.А.* Теория ползучести железобетонных конструкций. – Днепр-ск: Guadeamus, 2000. – 600 с.
12. *Колес П.* Исследование устойчивости стержня в условиях ползучести с помощью МКЭ в обобщенном виде // Строительство, вып. 35, №1, 1988. - С. 16-18.

13. *Белкин В.П., Каледин В.О.* О применении конечно элементных моделей к задаче устойчивости при ползучести /Сиб. металлург. ин-т. - Новокузнецк, 1988. - 5 с. Деп. в ВИНТИ 16.11.88, № 8144-V88.
14. *Яценко Е.А., Слободянюк С.А.* Теория длительной прочности и устойчивости стержневых железобетонных систем с учетом ползучести бетона. Монография – Днепропетровск: ПДАБА; Пороги, 2002. – 252 с.
15. *Слободянюк С.А.* Деформационный расчет и устойчивость стержневых железобетонных систем с учетом длительных процессов // Дисс. ... доктора техн. наук: 05.23.01. – Днепропетровск: ПГАСА, 2002. – 280 с.
16. *Слободянюк С.А., Буратинский А.П., Шербачов А.Д.* Теорія тривалої міцності та стійкості стержневих залізобетонних систем з урахуванням повзучості та віброповзучості бетону. Звіти НДР по державній темі № 32 (номер державної реєстрації 0110U002434, науковий керівник, д.т.н., проф. С.О.Слободянюк). – Дніпропетровськ: ДВНЗ «ПДАБА», том 1, 2010. – 153 с.; том 2, 2011. – 140 с.; том 3, 2012. – 154 с.
17. *Слободянюк С.А., Буратинский А.П.* Метод начальных параметров виброползучести бетона // “Бетон и железобетон в Украине”. – 2010. - № 5. – С. 6 – 7.
18. *Большаков В.И., Яценко Е.А., Соссу Г.* Основы метода конечных элементов. – Днепропетровск: Gaudeamus, 2000. - 255 с.
19. *Яценко Е.А.* Методы расчета железобетонных конструкций на длительное воздействие с учетом ползучести бетона: Дис. ... докт. техн. наук: 05.23.01. - М., 1989. – 364 с.
20. *ДБН В.2.6-98:2009.* Бетонні та залізобетонні конструкції. Основні положення. – К.: Мінергіобуд України, 2011. – 71 с.

## REFERENCES

1. *Weinberg, D.V., Chudnovsky, V.G.* Calculation of space frames (Расчет пространственных рам). - К.: Gosstroyizdat USSR, 1964. – 308 p.
2. *Drozдов P.F.* Design and calculation of load-bearing systems of multistoried buildings and their elements (Konstruirovaniye i raschet nesushchikh sistem mnogoetaznykh zdaniy i ikh elementov). - М.: Stroizdat, 1977. - 223 p.
3. *Nemchinov Yu.I.* Calculation of space structures (finite element method) (Расчет пространственных конструкций методом конечных элементов). - К.: Budivelnik, 1980. - 232 p.
4. *Bazhenov V.A., Sakharov A.S., Melnichenko G.I.* The finite element method in problems of structural mechanics (Metod konechnykh elementov v zadachakh stroitel'noy mekhaniki). - К.: KGTUSA, 1994.- 368 p.
5. *Varvak P.M., Buzun I.M., Gorodetsky A.S.* The finite element method (Metod konechnykh elementov). - К.: Vishcha school, 1981. - 176 p.
6. *Maslennikov A.M.* Calculation of engineering structures by the finite element method (Расчет строител'nykh konstruksiyi metodom konechnykh elementov). - L.: LISI, 1977. - 80 p.
7. *Isakhanov G.V., Granat S.Ya., Melnichenko G.I.* Structural mechanic: Calculation of core systems on a computer (Stroitel'naya mekhanika: Raschet sterzhnevyykh sistem na EVM). - К.: Vishcha school, 1990. - 229 p.
8. *Prokopovich I.E., Yaremko A.F.* Application of the finite element method to solving problems of the linear theory of creep (Primeneniye metoda konechnykh elementov k resheniyu zadach lineynoy teorii polzuchesti) // Stroit. mekh. i raschet sooruzheniy, № 6, 1982. - pp. 29-33.
9. *Yevzerov I.D.* Finite element method for long-term load effects (Metod konechnykh elementov pri raschete na dlitel'noye deystviye nagruzki) // Resistance of materials and theory of structures, vol. 56. - К.: Budivelnik, 1990. -P. 98-103.
10. *Kubaneshevili A.S., Menagarishvili Z.R., Tushishvili Z.I.* Application of FEM to the calculation of reinforced concrete structures taking into account creep of concrete (Primeneniye MKE k raschetu ZHBK s uchetoм polzuchesti betona) // Beton i zhb. v energ. str-ve. Mater. Vsesoyuz. konf. po bet. i zhb. Kazan', okt., 1988. - Tbilisi, 1988. - pp. 94-98.
11. *Yatsenko E.A., Kornilov S.V., Bovin A.A.* Theory of creep of reinforced concrete structures (Teoriya polzuchesti zhelezobetonnykh konstruksiy). - Dnepropetrovsk: Gaudeamus, 2000. - 600 p.
12. *Kolev P.* Research stability of a rod in creep conditions using FEM in a generalized form (Issledovaniye ustoychivosti sterzhnya v usloviyakh polzuchesti s pomoshch'yu MKE v obobshchennom vide) // Construction, vol. 35, No. 1, 1988. - p. 16-18.
13. *Belkin V.P., Kaledin V.O.* Application of finite elemental models to the problem of creep stability (O primenenii konechno elementnykh modeley k zadache ustoychivosti pri polzuchesti) // Sib. metallurg. inst. - Novokuznetsk, 1988. - 5 s. Dep. v VINITI 16.11.88, № 8144-V88.



14. *Yatsenko E.A., Slobodianiuk S.A.* The theory of long-term strength and stability of rod-reinforced concrete systems with allowance for creep of concrete. Monograph. (Teoriya dlitel'noy prochnosti i ustoychivosti sterzhnevyykh zhelezobetonnykh sistem s uchedom polzuchesti betona) - Dnepropetrovsk: PDABA; Porogi, 2002. – 252 p.
15. *Slobodianiuk S.A.* Deformation calculation and stability of core concrete systems with allowance for long-term processes (Deformatsionnyy raschet i ustoychivost' sterzhnevyykh zhelezobetonnykh sistem s uchedom dlitel'nykh protsessov) // Diss. ... doctor tech. sciences: 05.23.01. - Dnepropetrovsk: PGASA, 2002. - 280 p.
16. *Slobodianiuk S.A., Buratinskiy A.P., Shcherbachov A.D.* The theory of long durability and stability of core reinforced concrete systems with allowance for the creep and vibrocreep of concrete. Reports of research work on the state theme № 32 (state registration number 0110U002434, scientific supervisor, doctor of technical sciences, professor S.A. Slobodianiuk) (Teoriya tryvaloyi mitsnosti ta stiykosti sterzhnevyykh zalizobetonnykh sistem z urakhuvannyam povzuchosti ta vibropovzuchosti betonu. Zvity NDR po derzhavnyi temi № 32)
17. *Slobodianiuk S.A., Buratinskiy A.P.* The method of initial parameters of vibrocreep concrete (Metod nachal'nykh parametrov vibropolzuchesti betonu) // Beton i zhelezobeton v Ukraine. - 2010. - № 5. - p. 6 - 7.
18. *Bolshakov V.I., Yatsenko E.A., Sossa G.* Fundamentals of the finite element method (Osnovy metoda konechnyykh elementov). - Dnepropetrovsk: Gaudeamus, 2000. - 255 p.
19. *Yatsenko E.A.* Methods for calculating reinforced concrete structures for a long-term effect, taking into account concrete creep (Metody rascheta zhelezobetonnykh konstruktsiy na dlitel'noye vozdeystviye s uchedom polzuchesti betona): Diss. ... doctor tech. sciences: 05.23.01.-M., 1989. - 364 p.
20. *DBN V.2.6-98: 2009.* Concrete and reinforced concrete constructions. General considerations (Betonni ta zalizobetonni konstruktsiyi. Osnovni polozhennya). - K.: Minregionstroy of Ukraine, 2011. - 71 p.

*Стаття надійшла 30.07.2019 р.*

*Slobodianiuk S.O., Buratynskiy A.P.*

#### **DEFORMATION CALCULATION OF SPACE REINFORCED CONCRETE FRAME BY FEM WITH ALLOWANCE FOR VIBROCREEP OF CONCRETE**

The efficiency of the reinforced frameworks depends to a large extent on a properly framing scheme. If the framing scheme is made of reinforced concrete, the frame displays at various long static and dynamic loads such a characteristic phenomenon as the creep and vibrocreep of concrete. In addition, the space frame must take into account the buckling strain. An algorithm for the calculation of  $n$ -times kinematically indeterminate space reinforced concrete frames has been developed, taking into account buckling strain, creep and vibrocreep based on finite element analysis and recursion formulas, which makes it possible to simplify the calculation of bar systems for long processes. Recursion formulas can be used to develop programs for calculating space frames. The article presents the research and obtained a stiffness matrix of three types of reinforced concrete space finite element, taking into account buckling strain and long processes. An algorithm for calculating reinforced concrete bar systems was developed taking into account the space work, buckling strain, vibrocreep of concrete by finite element method. An executed example of the calculation of a reinforced concrete space framed structure showed that taking into account the buckling strain of the rods and the vibrocreep of concrete significantly alter the stress-strain state of space systems. Some frame motions increase by 135-348% over time, and the force variation varies from + 88% to -231% in comparison with elastic non-deformation values. The increase in displacements is mainly influenced by creep and vibration creep, which account for 135% –184% and 228% - 338%, respectively, and for the growth of efforts – buckling strain, the share of which ranged from + 10% to -228%. Deformation calculations of framed reinforced concrete systems should be performed not only to establish a change in the pattern of internal forces and time motions, but in the most dangerous places of the system to determine the stresses in reinforced and concrete and deflections to prevent the excess of calculated resistances of materials and normative motions.

**Keywords:** space frame; stiffness matrix; finite element method; algorithm; shrinkage; creep; concrete vibrocreep.

*Слободянюк С.А., Буратинский А.П.*

### **ДЕФОРМАЦИОННЫЙ РАСЧЕТ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫХ РАМ МКЭ С УЧЕТОМ ВИБРОПОЛЗУЧЕСТИ БЕТОНА**

Рассматривается задача расчета пространственной железобетонной рамы методом конечных элементов (МКЭ) с учетом деформированной схемы и длительных процессов – усадки, ползучести и виброползучести бетона. Расчет с учетом деформированной схемы или деформаций продольного изгиба называют еще деформационным расчетом. Получено матрицы жесткости трех типов конечных элементов в местной системе координат, матрицу жесткости всей системы, решение разрешающего уравнения и алгоритм МКЭ. Рассмотрено предложение по формулам автоматизированного расчета, а также пример расчета пространственной рамы.

**Ключевые слова:** пространственная рама, матрица жесткости, метод конечных элементов, алгоритм, усадка, ползучесть, виброползучесть бетона.

УДК 624.046.012.45: 539.376

*Слободянюк С.О., Буратинський А.П.* **Деформаційний розрахунок просторових залізобетонних рам МСЕ з урахуванням віброповзучості бетону** // Опір матеріалів і теорія споруд: наук.-тех. збірн. – К.: КНУБА, 2019. – Вип. 103. – С. 219-234.

*Розглядається задача розрахунку просторової залізобетонної рами методом скінченних елементів (МСЕ) з урахуванням деформованої схеми та тривалих процесів – усадки, повзучості і віброповзучості бетону.*

Іл. 6. Бібліогр. 20 назв.

UDC 624.046.012.45: 539.376

*Slobodianiuk S.O., Buratynskyi A.P.* **Deformation calculation of space reinforced concrete frame by FEM with allowance for vibrocreep of concrete** // Strength of Materials and Theory of Structures: Scientific-and-technical collected articles – Kyiv:KNUBA, 2019. – Issue 103. – P. 219-234.

*The article discusses calculation of space reinforced concrete frame by the finite element method with allowance for deformed model and long processes, such as shrinkage, creep and vibrocreep concrete.*

Fig. 6. Ref. 20.

УДК 624.046.012.45: 539.376

*Слободянюк С.А., Буратинский А.П.* **Деформационный расчет пространственных железобетонных рам МКЭ с учетом виброползучести бетона** // Сопротивление материалов и теория сооружений: науч.-тех. сборн. – К.: КНУСА, 2019. – Вип. 103. – С. 219-234.

*Рассматривается задача расчета пространственной железобетонной рамы методом конечных элементов (МКЭ) с учетом деформированной схемы и длительных процессов – усадки, ползучести и виброползучести бетона.*

Ил. 6. Библиогр. 20 назв.

**Автор (научовий ступінь, вчене звання, посада):** доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри теоретичної механіки Слободянюк Сергій Олександрович

**Адреса:** 49600. м. Дніпро, вул. Чернишевського, 24а, ДВНЗ "Придніпровська державна академія будівництва та архітектури"

**Мобільний тел.:** +380662137823

**Імейл:** [slobodianiuk.sergey@gmail.com](mailto:slobodianiuk.sergey@gmail.com)

**ORCID ID:** <https://orcid.org/0000-0003-4874-7296>

**Автор (научовий ступінь, вчене звання, посада):** кандидат технічних наук, доцент

**Буратинський Андрій Петрович**

**Адреса робоча:** 49000. м. Дніпро, вул. Чернишевського, 24а, ДВНЗ "Придніпровська державна академія будівництва та архітектури"

**Мобільний тел.:** +380672521309

**Імейл:** [buratynskyi.andrii@pgasa.dp.ua](mailto:buratynskyi.andrii@pgasa.dp.ua)

**ORCID ID:** <https://orcid.org/0000-0001-5152-3766>

УДК 539.3

## ВПЛИВ ГЕОМЕТРИЧНИХ ХАРАКТЕРИСТИК КОНІЧНИХ ОБОЛОНОК НА ЇХ ДИНАМІЧНУ СТІЙКІСТЬ

О.М. Палій,  
старший викладач

О.О. Лук'яненко,  
канд. техн. наук

*Київський національний університет будівництва і архітектури  
Повітрофлотський просп., 31, м. Київ. 03680; e-mail: [paliy.oxana@gmail.com](mailto:paliy.oxana@gmail.com)*

DOI: 10.32347/2410-2547.2019.103.235-242

Досліджено вплив геометричних характеристик конічних оболонок на стійкість усталених коливань при дії періодичних за часом рівномірно розподілених повздовжніх навантажень. Задача стійкості нелінійних вимушених коливань оболонок сформована на основі модифікованого кінцево-різницевого методу криволінійних сіток, який дозволив здійснити перехід від векторних звичайних диференціальних співвідношень до нелінійної системи алгебраїчних рівнянь. Розв'язок системи побудовано за допомогою методу продовження розв'язку по параметру в поєднанні з методом Ньютона–Канторовича. На кожному кроці реалізації обчислювального алгоритму виконано аналіз значення визначників матриці лінеаризованих рівнянь, що відповідають симетричним або циклічно симетричним формам коливань. Критерій втрати динамічної стійкості конічних оболонок полягав у зміні знаку відповідного визначника або зміни кількості додатних та від'ємних діагональних елементів матриці лінеаризованих рівнянь. Критичне значення динамічного навантаження характеризувало рівень його інтенсивності при втраті стійкості оболонок.

Виявлено особливості коливального руху та форм втрати стійкості конічних оболонок. Визначено критичні значення повздовжніх навантажень. Досліджена залежність критичних значень інтенсивності навантажень від частоти усталених коливань при варіюванні геометричних параметрів конічних оболонок.

**Ключові слова:** власні частоти, вимушені коливання, динамічна стійкість, конічна оболонка, метод криволінійних сіток, метод продовження розв'язку по параметру, метод Ньютона–Канторовича.

### Вступ

Особливу увагу в дослідженні динамічної стійкості конструкцій привертають випадки, коли частота вимушених коливань наближається до однієї з власних частот коливань конструкції [1-3]. Це призводить до різкого збільшення її амплітуди коливань, що є неприйнятним з експлуатаційної точки зору. В той же час і при фіксованій частоті коливань збільшення амплітуди періодичного навантаження може привести до різкого збільшення амплітуди коливань конструкції або змінити її форми коливань.

Мета даної роботи полягає у дослідженні впливу геометричних характеристик конічних оболонок на стійкість їх усталених коливань при дії періодичних за часом рівномірно розподілених повздовжніх навантажень. Коливання оболонки відбувається при фіксованій частоті, яка відповідає частоті періодичного навантаження. Відомо, що при дії періодичного навантаження невеликої інтенсивності коливання оболонок відбуваються по симетричним відносно осі формам коливань. Збільшення

інтенсивності силового збурювання при фіксованій частоті може переводити симетричні форми коливань в циклічно симетричні. За певних умов, залишаючись симетричними, коливання оболонки можуть різко збільшити амплітуду і змінити симетричну форму коливань. Перераховані явища характеризують втрату стійкості усталеного руху оболонки [4-6].

### 1. Чисельна методика

Вимушені коливання оболонки описується системою нелінійних диференціальних рівнянь

$$\frac{\partial^2 \vec{U}}{\partial t^2} + \vec{F}(\vec{U}) + \lambda \vec{q} = 0, \quad (1)$$

де  $\vec{U} = \{U_1, U_2, U_3\} = \{U, V, W\}$  – вектор переміщення;  $\vec{F} = \{F_1, F_2, F_3\}$  – нелінійна вектор-функція, яка характеризує жорсткісні властивості оболонки;  $\vec{q} = \{q^1, q^2, q^3\}$  – вектор зовнішнього навантаження;  $\lambda$  – параметр інтенсивності навантаження.

Для розв'язання задачі стійкості вимушених нелінійних коливань оболонки диференціальні рівняння (1) дискретизуються в напрямку твірної оболонки за допомогою модифікованого кінцево-різницевого метода криволінійних сіток. Цей метод дозволяє здійснювати перехід від векторних звичайних диференціальних співвідношень до нелінійної системи алгебраїчних рівнянь. В круговому напрямку компоненти вектора переміщень елемента середньої поверхні оболонки апроксимуються тригонометричними рядами [4, 5]. Розв'язок отриманої системи нелінійних алгебраїчних рівнянь будується методом продовження розв'язку по параметру в поєднанні з методом Ньютона-Канторовича [3]. Ці методи дозволяють розв'язок нелінійної крайової задачі звести до розв'язку послідовності лінеаризованих крайових задач. На кожному кроці реалізації обчислювального алгоритму аналізуються значення визначників матриці лінеаризованих рівнянь, що відповідають симетричним або циклічно симетричним формам коливань. Критерій втрати стійкості коливань оболонки полягає у зміні знаку відповідного визначника, а рівень інтенсивності навантаження, що відповідає цьому стану, характеризує критичне динамічне навантаження [3-5].

### 2. Розрахункова модель конічної оболонки

Розглянута конічна оболонка, яка виготовлена зі сталі з відповідними механічними характеристиками: коефіцієнт Пуассона  $\mu = 0,3$ ; модуль пружності  $E = 2,06 \cdot 10^{11}$  Н/м<sup>2</sup>; щільність  $\gamma = 7800$  кг/м<sup>3</sup>. Товщина оболонки  $h$  набувала значення 0,001 м та 0,002 м. Розглядалися варіанти зі сталими радіусами  $R = 0,20$  м;  $r = 0,15$  м та різною висотою оболонки  $L$ , яка набувала значення 0,48 м та 0,72 м. Граничні умови приймалися такими: на одному кінці оболонка жорстко закріплена, а на іншому – задано ковзне кріплення вздовж твірної. Твірну конічної оболонки розбито на 44 частини, вздовж кола – на 40 частин. На оболонку діє періодичне за часом рівномірно розподілене повздовжнє навантаження  $q = q_1 \cos \omega t$  з інтенсивністю  $q_1$  (кН/м) та круговою частотою  $\omega$  (рад/с).

### 3. Вплив геометричних параметрів кінчної оболонки на стійкість її усталених коливань

Стійкість усталених коливань досліджувалась для кінчної оболонки зі сталими геометричними параметрами:  $h=0,002$  м;  $R=0,2$  м;  $r=0,15$  м, та висотою, яка приймала значення  $L=0,48$  м та  $L=0,72$  м. В табл. 1 наведені критичні значення амплітуд навантаження  $q_1^*$  при відповідних частотах коливань  $\omega$  кінчної оболонки, а також номери гармонік  $n$ , які характеризують циклічно симетричні форми втрати стійкості.

Таблиця 1

$\omega$	$n$	$q_1^*$	$\omega$	$n$	$q_1^*$	$\omega$	$n$	$q_1^*$
1	2	3	4	5	6	7	8	9
<b><math>h=0,002</math> м <math>R=0,2</math> м <math>r=0,15</math> м <math>L=0,48</math> м</b>								
0	9	3650,045	3100	5	2385,045	<b>3545</b>	<b>4</b>	<b>0,045</b>
500	9	3650,045	3200	5	2025,045	3600	6	3375,045
700	9	3645,045	3400	5	855,045	3650	6	3300,045
1000	8,9	3645,045	3410	5	720,045	3800	6	2925,045
1400	8,9	3645,045	<b>3438</b>	<b>5</b>	<b>0,045</b>	4000	6	1800,045
1700	9	3600,045	3450	4	1350,045	4080	6	810,045
2300	9	3555,045	3500	4	945,045	4090	6	540,045
2500	8,9	3555,045	3510	4	810,045	<b>4099</b>	<b>6</b>	<b>0,045</b>
3000	5	2700,045	3520	4	675,045			
<b><math>h=0,002</math> м <math>R=0,2</math> м <math>r=0,15</math> м <math>L=0,72</math> м</b>								
0	10-14	2300,025	2000	4	1700,025	2650	3	600,025
100	10-14	2300,025	2200	4	925,025	<b>2667</b>	<b>3</b>	<b>0,025</b>
300	9	2300,025	2250	4	525,025	2670	5	1375,025
500	9-14	2300,025	<b>2274</b>	<b>4</b>	<b>0,025</b>	2680	5	1300,025
700	9-14	2300,025	2300	9-15	2275,025	2700	5	1125,025
1000	9-14	2300,025	2400	3	2250,025	2750	5	525,025
1400	10-15	2300,025	2500	3	1825,025	2760	5	250,025
1700	12-13	2275,025	2600	3	1175,025	<b>2763</b>	<b>5</b>	<b>0,025</b>

В табл. 2 наведені результати обчислень критичних значень амплітуд навантаження  $q_1^*$  та номери гармонік  $n$  для кінчних оболонок зі сталими геометричними параметрами:  $R=0,2$  м;  $r=0,15$  м;  $L=0,48$  м при відповідних значеннях кругової частоти. При цьому товщина оболонки  $h$  приймала різні значення 0,001 м та 0,002 м.

Таблиця 2

$\omega$	$n$	$q_1^*$	$\omega$	$n$	$q_1^*$	$\omega$	$n$	$q_1^*$
1	2	3	4	5	6	7	8	9
<b><math>h=0,001</math> м <math>R=0,2</math> м <math>r=0,15</math> м <math>L=0,48</math> м</b>								
0	12	880,01	2300	6	570,01	2580	7	800,01
100	12	880,01	2500	6	50,01	2600	7	780,01
300	12	880,01	2501	6	0,01	2700	7	630,01
500	12	880,01	2510	5	290,01	2750	7	530,01
700	12	880,01	2520	5	250,01	2800	7	400,01
1000	12	880,01	2540	5	170,01	2840	7	230,01
1400	8,9	880,01	2550	5	100,01	2850	7	160,01
1700	9	880,01	2555	5	0,01	2858	7	0,01
2000	6	840,01	2570	7	810,01			

$h=0,002\text{ м}$ $R=0,2\text{ м}$ $r=0,15\text{ м}$ $L=0,72\text{ м}$								
0	9	3650,045	3100	5	2385,045	<b>3545</b>	<b>4</b>	<b>0,045</b>
500	9	3650,045	3200	5	2025,045	3600	6	3375,045
700	9	3645,045	3400	5	855,045	3650	6	3300,045
1000	8,9	3645,045	3410	5	720,045	3800	6	2925,045
1400	8,9	3645,045	<b>3438</b>	<b>5</b>	<b>0,045</b>	4000	6	1800,045
1700	9	3600,045	3450	4	1350,045	4080	6	810,045
2300	9	3555,045	3500	4	945,045	4090	6	540,045
2500	8,9	3555,045	3510	4	810,045	<b>4099</b>	<b>6</b>	<b>0,045</b>
3000	5	2700,045	3520	4	675,045			

З таблиць 1 і 2 бачимо, що існують частоти коливань конічної оболонки, при яких критичні значення амплітуд навантаження  $q_1^*$  наближаються до нуля. У випадку, коли товщина оболонки збільшується вдвічі, при однакових значеннях висоти та радіусів конічної оболонки, значення нижчих власних частот та критичне навантаження зростає, а кількість гармонік в коловому напрямку зменшується. При збільшенні висоти оболонки вдвічі та однакових значеннях товщини та радіусів значення критичного навантаження та нижчих власних частот знижується, а кількість гармонік в коловому напрямку зменшується.

Залежності критичних значень амплітуд навантаження та відповідні частоти коливань оболонки подано у вигляді кривих на рис. 1, 2. Для конічних оболонок зі сталими геометричними параметрами:  $h=0,002\text{ м}$ ;  $R=0,2\text{ м}$ ;  $r=0,15\text{ м}$  та різними значеннями висоти  $L$ , яка набуває значень  $L=0,48\text{ м}$

(а);  $L=0,72\text{ м}$  (б) ці залежності відображені на рис. 1.

На рис. 2 відображені залежності критичних значень амплітуд навантаження  $q_1^*$ , що періодично змінюється з часом, від частоти коливань конічних оболонок зі сталими геометричними параметрами:  $R=0,20\text{ м}$ ;  $r=0,15\text{ м}$ ;  $L=0,48\text{ м}$ . При цьому  $h$  набуває значень:  $h=0,001\text{ м}$  (а),  $h=0,002\text{ м}$  (б).

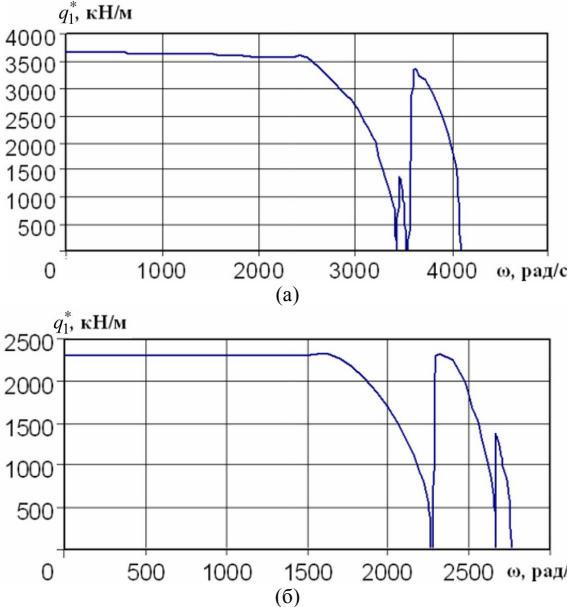


Рис. 1. Залежність критичного значення амплітуди навантаження  $q_1^*$  від частоти: (а)  $h=0,002\text{ м}$ ;  $R=0,20\text{ м}$ ;  $r=0,15\text{ м}$ ;  $L=0,48\text{ м}$ ; (б)  $h=0,002\text{ м}$ ;  $R=0,20\text{ м}$ ;  $r=0,15\text{ м}$ ;  $L=0,72\text{ м}$

Видно, що існують частоти зовнішнього навантаження, при яких представлені криві перетинають вісь частот (рис. 1, 2). Значення таких частот відповідають власним частотам вільних коливань і характеризують втрату стійкості усталених вимушених коливань конічної оболонки.

Також бачимо, що при сталих значеннях товщини і радіусів оболонки (табл. 1, рис. 1) збільшення її висоти приводить до пониження амплітуди

критичного навантаження та власних частот коливань оболонки. В цьому випадку втрата стійкості розглянутих оболонок відбувається по циклічно симетричним формам. При фіксованих значеннях радіусів та висоти конічної оболонки збільшення її товщини приводить до підвищення значення нижчих власних частот та критичних навантажень (табл. 2, рис. 2) і також втрата стійкості реалізується по циклічно симетричним формам.

**Висновок.** Представлена чисельна методика дозволила дослідити стійкість усталених коливань конічних оболонок при дії періодичних за часом рівномірно розподілених повздовжніх навантажень. Виявлена залежність форм втрати стійкості конічних оболонок та критичного значення амплітуди навантаження від геометричних параметрів оболонок, інтенсивності зовнішнього впливу та частоти усталених коливань.

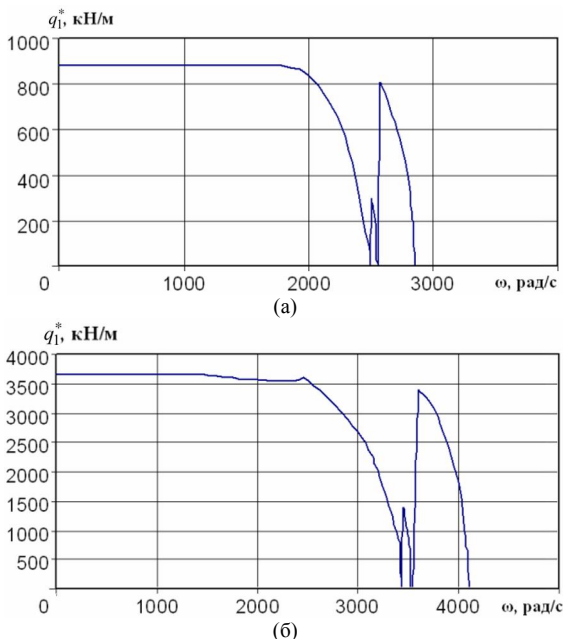


Рис. 2. Залежність критичного значення амплітуди навантаження  $q_1^*$  від частоти: (а)  $h=0,001$  м,  $R=0,20$  м,  $r=0,15$  м,  $L=0,48$  м; (б)  $h=0,002$  м,  $R=0,20$  м,  $r=0,15$  м,  $L=0,48$  м

#### СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Вольмир А.С. Устойчивость деформируемых систем. – М.: Наука, 1967. – 984 с.
2. Григоров Э.И., Кабанов В.В. Устойчивость оболочек. – М.: Наука, 1978. – 359с.
3. Гоцуляк Е.А., Гуляев В.И., Дехтярюк Е.С., Киричук А.А. Устойчивость нелинейных колебаний оболочек вращения // Прикладная механика. – Киев, 1982. – Т. 18, №6. – С. 50-56.
4. О.А. Киричук, О.М. Палій. Математична модель параметричних нелінійних коливань тонких оболонок // Вісник ХНТУ. – Херсон: ХНТУ, 2008. – Вип. 2(31). – С. 230-234.
5. Киричук А.А., Палій О.Н. Численно-аналитический метод исследования установившихся колебаний оболочечных конструкций // Математические модели в образовании, науке и

промышленности: Сборник научных трудов. – Санкт-Петербургское отделение МАН ВШ, 2003. – С. 55-58.

6. *Палій О.М., Лук'яненко О.О.* Частотний аналіз відгуку однополюго гіперболоїда на періодичне повздовжнє навантаження. Опір матеріалів і теорія споруд: наук.-тех. збірн. – К.: КНУБА, 2019. – Вип. 102. – С. 199-206.

#### REFERENCES

1. *Volmir A.S.* Ustoychivost deformiruemyykh sistem [Stability of deformable systems]. – М.: Nauka, 1967. – 984 s.(rus).
2. *Grigolyuk E.I., Kabanov V.V.* Ustoychivost obolochek [Shell stability]. – М.: Nauka, 1978. – 359 s.(rus).
3. *Gotsulyak E.A., Gulyaev V.I., Dehtyaryuk E.S., Kirichuk A.A.* Ustoychivost nelineynykh kolebaniy obolochek vrascheniya [Stability of nonlinear vibrations of revolution shells]// Prikladnaya mehanika. – Kiev, 1982. – Т. 18, #6. – С. 50- 56. (rus).
4. *Kirichuk A.A., Paliy O.N.* Chislenno-analiticheskiy metod issledovaniya ustanovivshisya kolebaniy obolochechnykh konstruksiy [A numerical-analytical method for studying the steady-state vibrations of shell structures]// Matematicheskie modeli v obrazovanii, nauke i promyshlennosti: Sbornik nauchnykh trudov. – Sankt-Peterburgskoe otdelenie MAN VSh, 2003. – С. 55-58. (rus).
5. *Kyrychuk O.A., Paliy O.M.* Matematychna model parametrychnykh nelineynykh kolyvan tonkykh obolonok [Mathematical model of parametric nonlinear oscillations of thin shells] // Vistnyk KhNTU. – Kherson: KhNTU, 2008. – Vyp. 2(31). – С. 230-234.(ukr)
6. *Paliy O.M., Lukianchenko O.O.* Chastotnyi analiz vidhuku odnopoloho hiperboloida na periodychno povzdovzhnie navantazhennia [Frequency analysis of response of same-sex hyperboloid to periodic longitudinal loading]// Opir materialiv i teoriia sporud: nauk.-tekh. zbim. – К.: КНУБА, 2019. – Вyp. 102. – С. 199-206.

*Стаття надійшла 09.09.2019 р.*

*Palii O.M., Lukianchenko O.O.*

#### **INFLUENCE OF CONIC SHELLS GEOMETRIC CHARACTERISTICS ON THEIR DYNAMIC STABILITY**

The influence of geometrical characteristics on the stability of established oscillations conical shells under the action of uniformly distributed longitudinal loads periodic in time is studied. The stability problem of nonlinear forced vibrations shells is formed on the basis of a modified finite-difference method of curvilinear grids, which allowed the transition from vector ordinary differential relations to a nonlinear system of equations. The solution of the system is constructed using the method of continuation the solution by parameter in combination with the Newton-Kantorovich method. At each step the implementation of the computational algorithm, the values of the determinants the matrix of linearized equations corresponding to symmetric or cyclically symmetric vibration modes are analyzed. The criterion for the conical shells loss of the dynamic stability was a change in the sign of the corresponding determinant or a change in the number of positive and negative diagonal elements of the matrix of linearized equations. The critical value of the dynamic load characterized the level of its intensity with the loss of stability of the shells.

The features of the oscillatory motion and loss forms of conical shells stability are revealed. The critical values of the longitudinal loads are determined. The dependence of the critical values of the load intensity on the frequency of steady oscillations with varying geometric parameters of the conical shell is investigated.

**Keywords:** natural frequencies; forced oscillations; dynamic stability; conical shell; curvilinear grids method; parameter continuation method; Newton-Kantorovich method.



Палий О.Н., Лукьянченко О.А.

### **ВЛИЯНИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК КОНИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК НА ИХ ДИНАМИЧЕСКУЮ УСТОЙЧИВОСТЬ.**

Исследовано влияние геометрических характеристик на устойчивость установившихся колебаний конических оболочек при действии периодических по времени равномерно распределенных продольных нагрузок. Задача устойчивости нелинейных вынужденных колебаний оболочек сформирована на основе модифицированного конечно-разностного метода криволинейных сеток, который позволил осуществить переход от векторных обыкновенных дифференциальных соотношений к нелинейной системе уравнений. Решение системы построено с помощью метода продолжения решения по параметру в сочетании с методом Ньютона-Канторовича. На каждом шагу реализации вычислительного алгоритма выполнен анализ значения определителей матрицы линеаризованных уравнений, соответствующие симметричным или циклично симметричным формам колебаний оболочек. Критерий потери динамической устойчивости конических оболочек заключался в изменении знака соответствующего определителя или изменения количества положительных и отрицательных диагональных элементов матрицы линеаризованных уравнений. Критическое значение динамической нагрузки характеризовало уровень его интенсивности при потере устойчивости оболочек.

Выявлены особенности колебательного движения и форм потери устойчивости конических оболочек. Определены критические значения продольных периодических нагрузок. Исследована зависимость критических значений интенсивности нагрузок от частоты установившихся колебаний при варьировании геометрических параметров конической оболочки.

**Ключевые слова:** собственные частоты, вынужденные колебания, динамическая устойчивость, коническая оболочка, метод криволинейных сеток, метод продолжения решения по параметру, метод Ньютона-Канторовича.

УДК 539.3

*Палий О.М., Лукьянченко О.О. Вплив геометричних характеристик конічних оболонок на їх динамічну стійкість // Опір матеріалів і теорія споруд: наук.-тех. збірн. – К.: КНУБА, 2019. – Вип. 103. – С. 235-242.*

*Досліджено вплив геометричних характеристик конічних оболонок на стійкість установлених коливань при дії періодичних за часом рівномірно розподілених повздовжніх навантажень. Задача динамічної стійкості оболонок сформована на основі методу криволинійних сіток і розв'язана за допомогою методу продовження розв'язку по параметру в поєднанні з методом Ньютона-Канторовича.*

Табл. 2. Ил. 2. Библиогр. 6 назв.

UDC 539.3

*Palii O.M., Lukianchenko O.O. Influence of conical shells geometric characteristics on their dynamic stability // Strength of Materials and Theory of Structures. – 2019. – Issue. 103. – P. 235-242.*

*The influence of conical shells geometric characteristics on steady oscillations stability under periodically distributed longitudinally distributed loads is studied. The problem of shells dynamic stability on the basis of the method of curvilinear grids is formed and is solved by the method of parameter continuation in combination with the Newton-Kantorovich method.*

Tab. 2. Fig. 2. References 6 items.

УДК 539.3

*Палий О.Н., Лукьянченко О.А. Влияние геометрических характеристик конических оболочек на их динамическую устойчивость // Сопротивление материалов и теория сооружений: науч.-тех. сборн. – К.: КНУСА, 2019. – Вип. 103. – С. 235-242. – Укр.*

*Исследовано влияние геометрических характеристик конических оболочек на устойчивость установившихся колебаний при действии периодических равномерно распределенных продольных нагрузок. Задача динамической устойчивости оболочек сформирована на основе метода криволинейных сеток и решена методом продолжения решения по параметру в сочетании с методом Ньютона-Канторовича.*

Табл. 2. Ил. 2. Библиогр. 6 назв.

**Автор (науковий ступінь, вчене звання, посада):** старший викладач кафедри теоретичної механіки КНУБА, ПАПІЙ Оксана Миколаївна.

**Адреса:** 03680 Україна, м. Київ, Повітрофлотський проспект 31, Київський національний університет будівництва і архітектури, ПАПІЙ Оксані Миколаївні.

**Робочий тел.:** +38(044) 241-55-72.

**Мобільний тел.:** +38(067) 236-39-85.

**Імейл:** [paliv.oxana@gmail.com](mailto:paliv.oxana@gmail.com)

**ORCID ID:** <http://orcid.org/0000-0001-5958-4862>

**Автор (науковий ступінь, вчене звання, посада):** кандидат технічних наук, старший науковий співробітник НДІ будівельної механіки КНУБА, ЛУК'ЯНЧЕНКО Ольга Олексіївна.

**Адреса робоча:** 03680 Україна, м. Київ, Повітрофлотський проспект 31, Київський національний університет будівництва і архітектури, ЛУК'ЯНЧЕНКО Ользі Олексіївні.

**Робочий тел.:** +38(044) 245-40-20.

**Мобільний тел.:** +38(095) 727-18-25.

**Імейл:** [lukianchenko.oo@knuba.edu.ua](mailto:lukianchenko.oo@knuba.edu.ua)

**ORCID ID:** <http://orcid.org/0000-0003-1794-6030>

УДК 539.3

## ДОСЛІДЖЕННЯ ТОЧНОСТІ МОДИФІКОВАНОГО МЕТОДУ ПРЯМИХ ПРИ РОЗРАХУНКУ ВІСЕСИМЕТРИЧНИХ ТІЛ

Д.В. Левківський,

канд. техн. наук

К.О. Каверин,

канд. техн. наук

Ю.В. Сович

Київський національний університет будівництва і архітектури,  
Київ, Повітрофлотський просп., 31, м. Київ. 03680

DOI: 10.32347/2410-2547.2019.103.243-252

У даній роботі показано застосування модифікованого методу прямих для визначення напружено-деформованого стану тіл обертання в циліндричній системі координат. Зниження вимірності виконується проєкційним методом по координаті  $z$ , за допомогою локальних базисних функцій. Редукована система рівнянь та граничні умови розв'язуються чисельним методом дискретної ортогоналізації С.К. Годунова. Дослідження точності проведено на прикладі вісесиметричної кільцевої пластини різних товщин. Результати порівнюються із значеннями теорії тонких пластин та отриманими методом скінченних елементів.

**Ключові слова:** товсті пластини, вісесиметричне тіло, теорія пружності, проєкційний метод, модифікований метод прямих, базисні функції, метод дискретної ортогоналізації С.К. Годунова.

Розглянемо вісесиметричне тіло (рис. 1). По координаті  $\theta$  враховується осьова симетрія, тому задача зводиться до плоскої та розглядається в системі координат  $rOz$  (рис. 2).

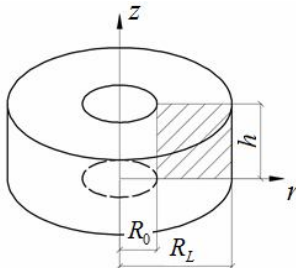


Рис. 1. Циліндричне тіло

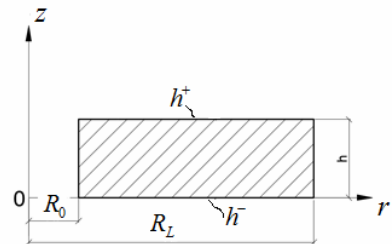


Рис. 2. Плоска вісесиметрична область

Для дослідження НДС використовуються рівняння теорії пружності в циліндричній системі координат [1].

У рівняннях  $\sigma_r$ ,  $\sigma_\theta$ ,  $\sigma_z$ ,  $\tau_{rz}$  - компоненти тензора напружень.  $u$ ,  $w$  - переміщення відповідно в напрямку осі  $r$  та  $z$ ;  $\lambda$ ,  $\mu$  - коефіцієнти Ляме.

Для зручності чисельних розрахунків проведена заміна  $f^* = \mu f$ .

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} + R &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\tau_{rz}}{r} + Z &= 0, \\ \sigma_r &= \frac{(\lambda + 2\mu)}{\mu} \frac{du^*}{dr} + \frac{\lambda}{\mu} \frac{dw^*}{dz} + \frac{\lambda}{\mu} \frac{u^*}{r}, \\ \sigma_\theta &= \frac{(\lambda + 2\mu)}{\mu} \frac{u^*}{r} + \frac{\lambda}{\mu} \frac{du^*}{dr} + \frac{\lambda}{\mu} \frac{dw^*}{dz}, \\ \sigma_z &= \frac{(\lambda + 2\mu)}{\mu} \frac{dw^*}{dz} + \frac{\lambda}{\mu} \frac{du^*}{dr} + \frac{\lambda}{\mu} \frac{u^*}{r} \end{aligned} \tag{1}$$

Граничні умови моделюються за допомогою стержнів заданої жорсткості, що дає можливість врахувати довільні умови взаємодії тіла з оточуючим середовищем (жорсткий контакт, шарнір, пружну взаємодію). На рис. 3-6 приведені граничні умови по контуру тіла:

при  $r = R_0$  :

$$\begin{aligned} \sigma_r(0, z) + q_{rr}(0, z) - K_{rr}^0 \cdot (u(0, z) - \Delta_{rr}(0, z)) &= 0; \\ \tau_{rz}(0, z) + q_{rz}(0, z) - K_{rz}^0 \cdot (w(0, z) - \Delta_{rz}(0, z)) &= 0; \end{aligned} \tag{2}$$

при  $r = R_L$  :

$$\begin{aligned} \sigma_r(l, z) - q_{rr}(l, z) + K_{rr}^l \cdot (u(l, z) - \Delta_{rr}(l, z)) &= 0; \\ \tau_{rz}(l, z) - q_{rz}(l, z) + K_{rz}^l \cdot (w(l, z) - \Delta_{rz}(l, z)) &= 0; \end{aligned} \tag{3}$$

$z = 0$  :

$$\begin{aligned} \sigma_z(r, 0) + q_{zz}(r, 0) - K_{zz}^1 \cdot (w(r, 0) - \Delta_{zz}(r, 0)) &= 0; \\ \tau_{rz}(r, 0) + q_{zr}(r, 0) - K_{zr}^1 \cdot (u(r, 0) - \Delta_{zr}(r, 0)) &= 0; \end{aligned} \tag{4}$$

$z = h$  :

$$\begin{aligned} \sigma_z(r, h) + q_{zz}(r, h) + K_{zz}^N \cdot (w(r, h) - \Delta_{zz}(r, h)) &= 0; \\ \tau_{rz}(r, h) + q_{zr}(r, h) + K_{zr}^N \cdot (u(r, h) - \Delta_{zr}(r, h)) &= 0. \end{aligned} \tag{5}$$

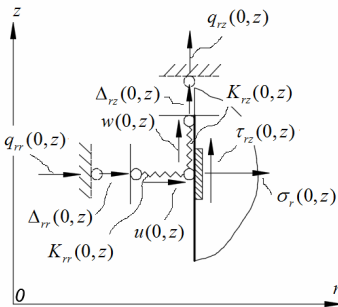


Рис. 3. Переріз  $r = R_0$

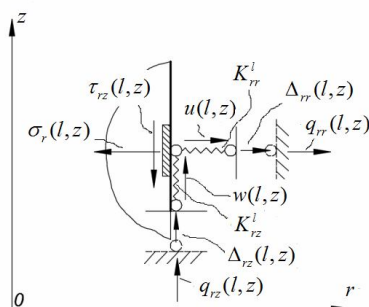


Рис. 4. Переріз  $r = R_L$

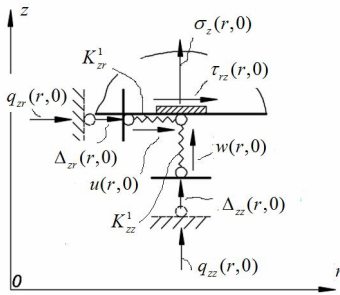


Рис. 5. Переріз  $z=0$

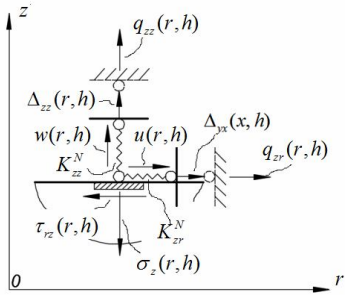


Рис. 6. Переріз  $z=h$

Зниження вимірності диференціальних рівнянь (1) та граничних умов (2)-(5) виконується за допомогою проєкційного методу. Тіло розбивається прямими на смужки з кроком  $\Delta$  (рис. 7).

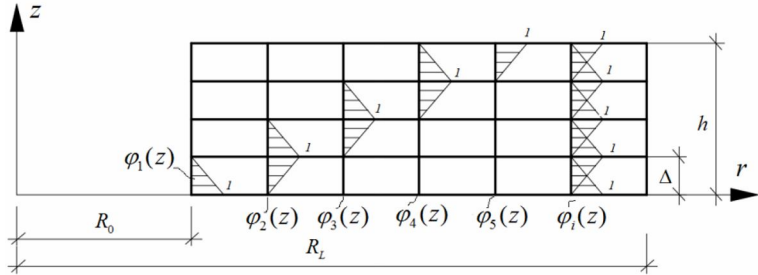


Рис. 7. Базисні функції

На прямих обирається система базисних функцій  $\varphi_i(z)$ . Шукані функції розкладаються за допомогою лінійної комбінації (6), знижується вимірність по координаті  $z$ :

$$f(r, z) \approx f^i(r) \varphi_i(z) \tag{6}$$

$$f(r, z) \approx f_i(r) \varphi^i(z)$$

Оскільки базисні функції утворюють косокутну систему, необхідно враховувати взаємний базис. Позначимо  $\varphi_i(z)$ - основний базис,  $\varphi^i(z)$ - взаємний базис. Для виконання перетворень використовується індексна форма запису та метричні тензори (7), детально процес редукування описано в роботах [2]-[5].

$$\{g_{ij}\} = \{\varphi_i, \varphi_j\}, \{g^{ij}\} = \{\varphi^i, \varphi^j\}, \{\delta_i^j\} = \{\varphi_i, \varphi^j\} = E. \tag{7}$$

На наступному етапі формується редукована задача, відносно координати  $r$ . Чисельне розв'язання поставленої задачі відносно функцій  $u, w, \sigma_r, \sigma_z$  проводиться методом дискретної ортогоналізації С.К. Годунова. Редуковані диференціальні рівняння записуються у вигляді коефіцієнтів що відповідає значенням шуканих функцій на певній прямій:

$$\begin{aligned} \frac{du^*}{dr} &= \frac{\mu}{\lambda + 2\mu} \sigma_r^\alpha - \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} g^{\alpha i} b_{ij} u^{*j}, \\ \frac{dw^*}{dr} &= g^{\alpha i} b_{ij} u^{*j} - \tau_{rz}^\alpha, \\ \frac{d\sigma_r^\alpha}{dr} &= -g^{\alpha j} [\tau_{rz}^N - \tau_{rz}^1] + g^{\alpha i} b_{ji} \tau_{rz}^j - \frac{1}{r} \frac{2\mu}{\lambda + 2\mu} \sigma_r^\alpha + \frac{2\lambda}{\lambda + 2\mu r} \frac{1}{r} g^{\alpha i} b_{ij} u^{*j} - \frac{2\lambda}{\lambda + 2\mu r} \frac{1}{r} \tau_{rz}^\alpha - R^\alpha, \\ \frac{d\tau_{rz}^\alpha}{dr} &= g^{\alpha j} [\sigma_z^1 - \sigma_z^N] + \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} g^{\alpha i} b_{ji} \sigma_r^j + \frac{4(\lambda + \mu)}{\lambda + 2\mu} g^{\alpha i} b_{ji} g^{j\beta} b_{\beta\gamma} w^{*\gamma} - \frac{\tau_{rz}^\alpha}{r} - Z^\alpha. \end{aligned} \tag{8}$$

Редуковані граничні умови мають вигляд:

при  $r = R_0$ :

$$\sigma_{r0}^\alpha + q_{rr0}^\alpha - K_{rr}^0 \cdot (u_0^\alpha - \Delta_{rr0}^\alpha) = 0,$$

$$\tau_{rz0}^\alpha + q_{rz0}^\alpha - K_{rz}^0 \cdot (w_0^\alpha - \Delta_{rz0}^\alpha) = 0,$$

при  $z = 0$ :

$$\sigma_z^1 = K_{zz}^1 \cdot (w^1 - \Delta_{zz}^1) - q_{zz}^1,$$

$$\tau_{rz}^1 = K_{zr}^1 \cdot (u^1 - \Delta_{zr}^1) - q_{zr}^1,$$

при  $r = R_L$ :

$$\sigma_{rl}^\alpha - q_{rrl}^\alpha + K_{rr}^l \cdot (u_l^\alpha - \Delta_{rrl}^\alpha) = 0,$$

$$\tau_{rzl}^\alpha - q_{rzl}^\alpha + K_{rz}^l \cdot (w_l^\alpha - \Delta_{rzl}^\alpha) = 0,$$

при  $z = h$ :

$$\sigma_z^N = -q_{zz}^N - K_{zz}^N \cdot (w^N - \Delta_{zz}^N),$$

$$\tau_{rz}^N = K_{zr}^N \cdot (u^N - \Delta_{zr}^N) - q_{zr}^N.$$

Під час редукування вихідні диференціальні рівняння зводяться до системи звичайних диференціальних рівнянь першого порядку, записаних у формі Коші, невідомі функції залежать лише від координати  $r$ . Розроблено чисельний алгоритм розрахунку поставленої граничної задачі, побудований на основі методу дискретної ортогоналізації С. К. Годунова [2]. Інтегрування рівнянь виконується методом Рунге-Кутта Мерсона 4 порядку точності. В середовищі Visual Fortran проведено чисельну реалізацію описаного алгоритму.

**Результати розрахунку.** Досліджується напружено-деформований

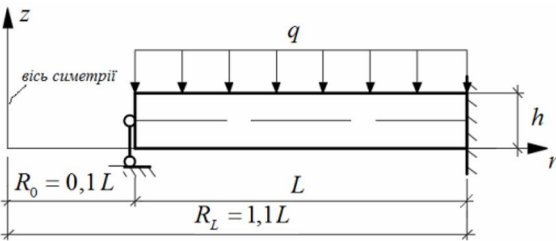


Рис. 8. Кільцева пластина

стан сталевого циліндричного тіла (рис. 8),  $E=2 \cdot 10^8 \text{ кПа}$ ,  $\nu = 0,3$ .

Були розглянуті тіла різних товщин:  $h_1=0,02L$ ,  $h_2=0,04L$ ,  $h_3=0,06L$ ,  $h_4=0,08L$ ,  $h_5=0,1L$  - відносяться

до тонких пластин, відповідає умові  $\frac{1}{80} < \frac{h}{R_L - R_0} < \frac{1}{10}$  та  $h_6 = 0,2L$ ,  $h_7 = 0,4L$ ,  $h_8 = 0,6L$ ,  $h_9 = 0,8L$ ,  $h_{10} = L$  - товсті пластини та масивні тіла, відповідає умові  $\frac{h}{R_L - R_0} > \frac{1}{10}$ . Порівнюються максимальні переміщення та напруження в перерізах  $r = 0,5L$ .

Отримано чисельні результати при різному кроці розбиття, оцінено збіжність та точність методу. Результати порівнюються з результатами отриманими в теорії тонких пластин. Встановлено, що оптимальний крок розбиття прямими по висоті складає  $\Delta = 0,01L$ .

У табл. 1 приведені результати розрахунку тонких кільцевих пластин по класичній теорії пластин (ТП) та модифікованим методом прямих (ММП). При збільшенні товщини тіла, результати двох методів відрізняються але в допустимих межах, до 5%. Також в теорії пластин зовнішнє навантаження прикладається до серединної площину пластини, не враховуючи поперечні деформації волокон та обтиснення нормалі. При цьому нормальні напруження  $\sigma_z \approx 0$ . У модифікованому методі прямих можна задавати довільні статичні да кінематичні впливи на тіло. Тому в моделі навантаження  $q$  прикладено до верхньої площини тіла, що також збільшує відносну похибку отриманих даних. У ММП моделювання жорсткого защемлення виконується за допомогою двох стержнів заданої жорсткості, що розташовані на кожній прямій. Для розрахунку було прийнято жорсткість  $k = 10^{20}$ . При збільшенні кількості прямих загальна жорсткість з'єднання збільшується.

У табл. 2 приведені результати розрахунку товстих пластин та масивних тіл. Отримані дані порівнюються з класичною теорією тонких пластин, тому показують велику розбіжність 50-100%.

### 1. Результати розрахунку тонких пластин

Таблиця 1

	$w_{\max}$ $q \cdot 10^5$	$\sigma_r(0,5L)$ $q$	$\sigma_\theta(0,5L)$ $q$	$\sigma_r(1,1L)$ $q$	$\tau_{rz}(0,5L)$ $q$
$h_1 = 0,02L$					
ТП	2,59	721,2	217,15	1157,3	3,076
ММП, $\Delta=0,01L$	2,59	720,9	217,61	1158,5	2,35
$\delta$ %	0	0,05	0,21	0,1	23,6
$h_2 = 0,04L$					
ТП	0,3	180,306	54,287	289,325	1,538
ММП, $\Delta=0,01L$	0,328	180,653	54,919	337,405	1,738
$\delta$ %	9,3	0,19	1,16	16,6	13
$h_3 = 0,06L$					
ТП	0,932	80,136	24,13	128,589	1,025
ММП, $\Delta=0,01L$	0,993	80,597	24,777	167,881	0,979
$\delta$ %	6,55	0,58	2,68	30,56	4,49
$h_4 = 0,08L$					
ТП	0,38	45,077	13,572	72,331	0,769
ММП, $\Delta=0,01L$	0,431	45,584	14,225	103,97	0,771
$\delta$ %	13,42	1,12	4,81	43,74	0,26
$h_5 = 0,1L$					
ТП	0,194	28,849	8,686	46,292	0,615
ММП, $\Delta=0,01L$	0,229	29,381	9,34	72,535	0,581
$\delta$ %	18,04	1,84	7,53	56,69	5,53

## 2. Результати розрахунку товстих пластин та масивних тіл

Таблиця 2

	$w_{\max}$ $q \cdot 10^5$	$\sigma_r(0,5L)$ $q$	$\sigma_\theta(0,5L)$ $q$	$\sigma_r(1,1L)$ $q$	$\tau_{rz}(0,5L)$ $q$
$h_6 = 0,2L$					
ТП	0,259	7,212	2,171	11,573	0,3075
ММП, $\Delta=0,01L$	0,368	7,788	2,809	25,939	0,263
$\delta$ %	42,08	7,99	29,39	124,13	14,47
$h_7 = 0,4L$					
ТП	0,323	1,803	0,543	2,893	0,154
ММП, $\Delta=0,01L$	0,858	2,392	1,133	11,548	0,092
$\delta$ %	165,6	32,67	108,66	299,17	40,26
$h_8 = 0,6L$					
ТП	0,958	0,801	0,241	1,285	0,103
ММП, $\Delta=0,01L$	4,399	1,419	0,797	8,364	0,041
$\delta$ %	359,1	77,15	230,71	550,89	60,19
$h_9 = 0,8L$					
ТП	0,404	0,451	0,136	0,723	0,077
ММП, $\Delta=0,01L$	2,875	1,11	0,678	7,19	0,017
$\delta$ %	611,6	146,12	398,53	894,47	77,92
$h_{10} = L$					
ТП	0,207	0,288	0,087	0,463	0,062
ММП, $\Delta=0,01L$	20,88	0,99	0,629	6,673	0,004
$\delta$ %	9987	243,75	622,99	1341,25	93,55

У табл. 3 приведені напруження в перерізі  $r=0,5L$  для тіла з співрозмірними габаритами  $h=L$ , завантаженого по схемі (рис. 8). Результати були отримані запропонованою методикою (ММП) та порівнюються з результатами методу скінченних елементів.

Таблиця 3

$h$	$\sigma_r \cdot q, r=0,5L$			$\sigma_z \cdot q, r=0,5L$			$\sigma_\theta \cdot q, r=0,5L$		
	ММП	МСЕ	$\delta$ %	ММП	МСЕ	$\delta$ %	ММП	МСЕ	$\delta$ %
$L$	-0,992	-0,877	13	-1,004	-0,939	6,9	-0,629	-0,519	21
$0,9L$	-0,592	-0,617	4	-0,978	-0,964	1,4	-0,503	-0,514	2,2
$0,8L$	-0,379	-0,369	2,7	-0,886	-0,882	0,4	-0,401	-0,405	1,0
$0,7L$	-0,219	-0,225	2,8	-0,758	-0,759	0,1	-0,306	-0,311	1,8
$0,6L$	-0,158	-0,146	8,2	-0,619	-0,620	0,2	-0,234	-0,232	0,9
$0,5L$	-0,098	-0,099	1,0	-0,473	-0,478	1,1	-0,166	-0,166	0,1
$0,4L$	-0,066	-0,064	3,6	-0,346	-0,343	1,0	-0,112	-0,109	2,4
$0,3L$	-0,024	-0,023	6,6	-0,212	-0,220	3,7	-0,054	-0,050	7,2
$0,2L$	0,049	0,045	8,9	-0,116	-0,113	2,4	0,004	0,008	49
$0,1L$	0,157	0,170	7,7	-0,019	-0,037	48	0,073	0,079	8,0
0	0,394	0,316	25	-0,003	-0,042	93	0,155	0,086	80



На рис. 9 показана тенденція збіжності результатів ММП при збільшенні кількості прямих від 3 до 11, що відповідає кроку розбиття відповідно  $\Delta = 0,5L - 0,01L$ . Було встановлено, що крок розбиття  $\Delta = 0,01L$  прямими по координаті  $z$  є оптимальним.

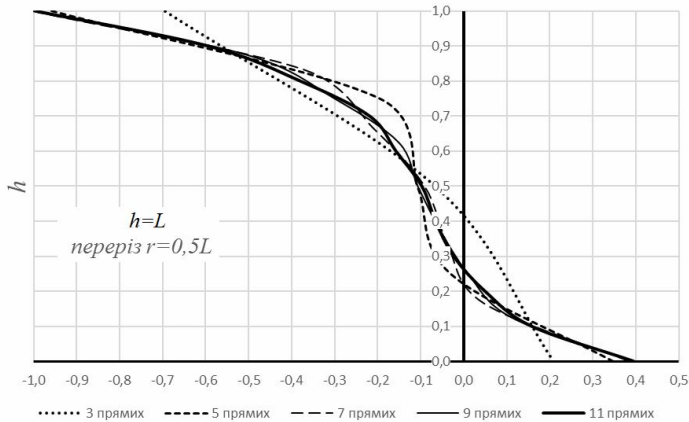


Рис.9 Радіальне нормальне напруження  $\sigma_r \cdot q$  при різній кількості прямих

**Висновки.** У даній роботі впроваджено модифікований метод прямих до зниження вимірності диференціальних рівнянь, записаних в циліндричній системі координат. Виявлені основні особливості редукування вихідних диференціальних рівнянь та граничних умов по координаті  $z$ . Точність методу регулюється кількістю прямих, але також залежить від кроку розбиття. При  $\Delta < 0,01$  призводить до втрати стійкості обчислювального процесу. Під час дослідження модифікованого методу прямих визначено межі, при яких розв'язки дають наближений результат до аналітичного значення (класичної теорії пластин). При товщині  $h/L > 0,08$  відносна похибка ММП та класичної теорії тонких пластин більше 5%, що пов'язано з обмеженням застосування теорії тонких пластин. На прикладі масивних тіл показано, що точність запропонованого методу не нижча за метод скінченних елементів. При однаковій сітці розбиття результати відрізняються в межах 5%. З тал.11 видно, що МСЕ дає похибку на верхній та нижній границі, що пов'язано з специфікою методу. Отримані в даній роботі результати є основою подальшого впровадження ММП для розрахунку задач термопружності, динаміки (в двовимірній та тривимірній постановці) для об'єктів що відносяться до тіл обертання.

#### СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Новацкий В. Теория упругости. Пер. с польск. Б. Е. Победри. – М.: Мир, 1975. –256 с.
2. Чибряков В. К., Станкевич А. М, Левківський Д. В. Особливості зниження вимірності рівнянь теорії пружності узагальненим методом прямих. // Містобудування та територіальне планування: Наук.-техн. Збірник. – Вип. 46. – Київ, КНУБА, 2012. – С. 613-624.

3. Станкевич А. М., Левківський Д. В. Три варіанти редуції рівнянь плоскої задачі теорії пружності методом “прямих” // Містобудування та територіальне планування: Наук.-техн. Збірник. – Вип. 49 – Київ, КНУБА, 2013. – С. 509-521.
4. Левківський Д. В. Метод прямих у циліндричній системі координат. / Д. В. Левківський, М. О. Янсонс // Опір матеріалів і теорія споруд: Науково-техн. Збірник. – Вип. 92, – Київ, КНУБА, 2013. – С. 118-124.
5. *V. Chybyryakov, A. Stankevich, D. Levkivskiy, V. Melnychuk* Application of generalized “method of lines”, for solving problems of thermoelasticity of thick plates. // An international journal on operation of farm and agri-food industry machinery “Motrol”, vol.16, №8, Lublin 2014. P. 11-20.

## REFERENCES

1. Novaczkiy V. Teoriya uprugosti. (Theory of elasticity). Per. s pol'sk. B. E. Pobedri. – М.: Mir, 1975. –256 s.
2. Chybyriakov V. K., Stankevych A. M, Levkivskiy D. V. Osoblyvosti znyzhennia vymirnosti rivnian teorii pruzhnosti uzahalnenym metodom priamykh. (Features of reduction of dimensionality equations theory of elasticity by generalized method of lines). // Mistobuduvannia ta terytorialne planuvannia: Nauk.-tekhn. Zbirnyk. – Vyp. 46. – Kyiv, KNUBA, 2012. – S. 613-624
3. Stankevych A. M., Levkivskiy D. V. Try varyanty reduksii rivnian ploskoi zadachi teorii pruzhnosti metodom “priamykh” ( Three variants of the reduction the equations of a plane problem of the theory of elasticity by the method of lines). // Mistobuduvannia ta terytorialne planuvannia: Nauk.-tekhn. Zbirnyk. – Vyp. 49 – Kyiv, KNUBA, 2013. – S. 509-521.
4. Levkivskiy D. V. Metod priamykh u tsylindrychnii systemi koordynat. / D. V. Levkivskiy, M. O. Yansons (The method of lines in a cylindrical coordinate system). // Opir materialiv i teoriia sporud: Naukovo-tekhn. Zbirnyk. – Vyp. 92, – Kyiv, KNUBA, 2013. – С. 118-124.
5. *V. Chybyryakov, A. Stankevich, D. Levkivskiy, V. Melnychuk* Application of generalized “method of lines”, for solving problems of thermoelasticity of thick plates. // An international journal on operation of farm and agri-food industry machinery “Motrol”, vol.16, №8, Lublin 2014. P. 11-20.

*Стаття надійшла 30.09.2019 р.*

*Levkivsky DV, Kaverin KO, Sovych Yu. V.*

#### **RESEARCH OF THE ACCURACY OF THE MODIFIED METHOD OF LINES IN THE CALCULATION OF AXISYMMETRIC BODIES**

This paper shows the application of a modified method of line for determining the stress-strain state of bodies of rotation under the static load. Differential equations of the theory of elasticity recorded in the cylindrical coordinate system are used for this purpose. Given the axial symmetry, the problem is reduced to plane and considered in the coordinate system  $rOz$ , circular coordinates of the desired functions do not change. In the first stage of the method, the dimensionality of initial differential equations and boundary conditions is reduced by the Bubnov-Petrov projection method by  $z$  coordinate, using local basis functions. As a result, the system of equations is reduced to a system of plain first-order differential equations that depend on the  $r$  coordinate. On the second stage of the method, the reduced system of equations and boundary conditions are solved by S.K. Godunov's numerical method of discrete orthogonalization in combination with the Runge-Kutta method of Merson.

The study revealed all the main features of reducing initial differential equations and boundary conditions. The limits at which the solutions give an approximate result to the analytical value (classical plate theory) are determined. The example of massive bodies shows that its accuracy is not lower than the finite element method. The results obtained in this work are fundamental for further implementation of MML for calculation of thermal elasticity, dynamics problems (in two- and three-dimensional formulation) for objects pertaining to bodies of rotation.

The accuracy study was performed on the example of an axisymmetric annular plate of different thicknesses. The results are compared with values of the theory of thin plates and the finite element method.

**Keywords:** thick plates; axisymmetric bodies; theory of elasticity; projection method; modified method of lines; local basis functions; method discrete orthogonalization S.K. Godunov; boundary conditions.

Левківський Д.В., Каверин К.О., Сович Ю.В.

### ДОСЛІДЖЕННЯ ТОЧНОСТІ МОДИФІКОВАНОГО МЕТОДУ ПРЯМИХ ПРИ РОЗРАХУНКУ ВІСЕСИМЕТРИЧНИХ ТІЛ

У даній роботі показано застосування модифікованого методу прямих для визначення напружено-деформованого стану тіл обертання при дії статичного навантаження. Для цього використовуються диференціальні рівняння теорії пружності, записані в циліндричній системі координат. Враховуючи осьову симетрію, задача зводиться до плоскої та розглядаються в системі координат  $rOz$ , по коловій координаті шукані функції не змінюються. На першому етапі методу виконується зниження вимірності вихідних диференціальних рівнянь та граничних умов проєкційним методом Бубнова-Петрова по координаті  $z$ , за допомогою локальних базисних функцій. В результаті система рівнянь зводиться до системи звичайних диференціальних рівнянь першого порядку, що залежать від координати  $r$ . На другому етапі методу редукована система рівнянь та граничні умови розв'язуються чисельним методом дискретної ортогоналізації С.К. Годунова в поєднанні з методом Рунге-Кутта варіант Мерсона.

Під час дослідження виявлені всі основні особливості редукування вихідних диференціальних рівнянь та граничних умов. Визначено межі, при яких розв'язки дають наближений результат до аналітичного значення (кlastичної теорії пластин). На прикладі масивних тіл показано що його точність не нижча за метод скінченних елементів. Результати отримані в даній роботі є основою подальшого впровадження ММП для розрахунку задач термопружності, динаміки (в двовимірній та тривимірній постановці) для об'єктів що відносяться до тіл обертання.

Дослідження точності проведено на прикладі вісесиметричної кільцевої пластини різних товщин. Результати порівнюються із значеннями теорії тонких пластин та отриманими методом скінченних елементів.

**Ключові слова:** товсті пластини, вісесиметричні тіла, теорія пружності, проєкційний метод, модифікований метод прямих, локальні базисні функції, метод дискретної ортогоналізації С.К. Годунова, граничні умови.

УДК 539.3

Левківський Д.В., Каверин К.О., Сович Ю.В. **Дослідження точності модифікованого методу прямих при розрахунку вісесиметричних тіл** // Опір матеріалів і теорія споруд: наук.-тех. збірник. – К.: КНУБА, 2019. – Вип. 103. – С. 243-252.

У роботі показано застосування модифікованого методу прямих для визначення напружено-деформованого стану тіл обертання в циліндричній системі координат. Зниження вимірності виконується проєкційним методом по координаті  $z$ , за допомогою локальних базисних функцій. Редукована система рівнянь та граничні умови розв'язуються чисельним методом дискретної ортогоналізації С.К. Годунова. Робота містить велику кількість чисельних результатів. Дослідження точності проведено на прикладі кільцевої пластини різних товщин. Результати порівнюються із значеннями теорії тонких пластин та отриманими методом скінченних елементів.

Табл. 3. Іл. 9. Бібліогр. 5 назв.

UDC 539.3

Levkivsky DV, Kaverin KO, Sovych Yu.V. **Research of the accuracy of the modified method of lines in the calculation of axisymmetric bodies** // Strength of Materials and Theory of Structures: Scientific-and-technical collected articles – Kyiv: KNUBA, 2019. – Issue 103. – P. 243-252.

This paper shows the application of a modified method of lines for determining the stress-strain state of rotation bodies in a cylindrical coordinate system. Dimension reduction is performed by the coordinate  $z$  by the projection method, using local basis functions. The reduced system of equations and boundary conditions are solved by the numerical method discrete orthogonalization of S.K. Godunova. The work contains a large number of numerical results. The accuracy study was performed on the example of an annular plate of different thicknesses. The results are compared with the values of the theory of thin plates and the finite element method.

Tabl. 3. Il. 9. Ref. 5.

**Автор (науковий ступінь, вчене звання, посада):** кандидат технічних наук, доцент кафедри опору матеріалів КНУБА ЛЕВКІВСЬКИЙ Дмитро Володимирович.

**Адреса:** 03680 Україна, м. Київ, Повітрофлотський проспект 31, КНУБА, кафедра опору матеріалів, Левківський Дмитро Володимирович.

**Мобільний тел.:** +38(096) 756-21-33;

**Імейл:** [Levkivskiyi.dv@gmail.com](mailto:Levkivskiyi.dv@gmail.com)

**ORCID ID:** <http://orcid.org/0000-0003-2964-1605>

**Автор (науковий ступінь, вчене звання, посада):** кандидат технічних наук, доцент кафедри будівельних матеріалів КНУБА КАВЕРИН Костянтин Олександрович.

**Адреса:** 03680 Україна, м. Київ, Повітрофлотський проспект 31, КНУБА, кафедра будівельних матеріалів, Каверин Костянтин Олександрович.

**Мобільний тел.:** +38(095)119-18-08;

**Імейл:** [kaveryn.ko@knuba.edu.ua](mailto:kaveryn.ko@knuba.edu.ua)

**ORCID ID:** <http://orcid.org/0000-0001-9086-5953>

**Автор (науковий ступінь, вчене звання, посада):** аспірант кафедри опору матеріалів КНУБА СОВИЧ Юлія Вікторівна

**Адреса:** 03680 Україна, м. Київ, Повітрофлотський проспект 31, КНУБА, кафедра опору матеріалів, Сович Юлія Вікторівна.

**Мобільний тел.:** +38(098)981-57-31;

**Імейл:** [yuliiasov@bigmir.net](mailto:yuliiasov@bigmir.net)

**ORCID ID:** <http://orcid.org/0000-0002-5114-6363>

УДК 539.3

**ОПТИМАЛЬНЕ ПРОЕКТУВАННЯ ЦИЛІНДРИЧНИХ РЕЗЕРВУАРІВ  
З ЖОРСТКИМИ ОБОЛОНКАМИ ПОКРИТТЯ.****О.О. Кошевий,**  
аспірант*Київський національний університет будівництва і архітектури, Київ  
Повітрофлотський просп., 31, м. Київ 03680*

DOI: 10.32347/2410-2547.2019.103.253-265

Розглянуто дослідження параметричної оптимізації паливних циліндричних резервуарів з жорсткими оболонками покриття. Отримані напруження по Мізесу і загальні переміщення просторових конструкцій після розрахунку оптимізації та побудовані діаграми цільової функції, та зроблені висновки по даному дослідженню. При проектуванні і будівництві промислових резервуарів для зберігання нафтових і хімічних продуктів в регіонах де присутнє сейсмічне навантаження дуже важливо проаналізувати всі комбінації навантажень, які діють на споруду, а також вибрати оптимальне рішення для такої конструкції. Як правило, такі резервуари поділяються на: підземні і надземні. Надземні поділяються в свою чергу на: резервуари з плаваючим дахом і з жорстким покриттям. В даній роботі розглядаються циліндричні резервуари без підтримуючих ребр з жорсткими оболонками покриття.

Для вирішення задач параметричної оптимізації розглядається математичний метод градієнтного спуску, який був запропонованим Розеном. Мета методу – за допомогою вихідних даних шляхом ітерацій знаходити оптимальне рішення для конструкції при заданих змінних проектування і обмеженнях, які накладаються на відгук конструкції. Метод градієнтного спуску передбачає без попередніх підборів поперечного перерізу конструкції та її моделювання, що проводиться з урахуванням вихідних даних та способи з'єднання конструкції з жорстким диском землі або іншими конструкціями, а також врахування об'єктивних причин.

Були побудовані два варіанта розрахункових просторових моделей паливних резервуарів за допомогою метода скінченних елементів. Були прикладені зовнішнє статичне і динамічні навантаження у вигляді сейсміки, так як будівництво резервуарів розглядається в сейсмоактивних районах України. За допомогою нової методики були визначені змінні проектування, а саме товщина оболонки от 1 до 100 мм і обмеження напружень по Мізесу 260 МПа і переміщення по осям  $X, Y, Z$ , 15 мм. Цільова функція – маса паливного резервуару. Варіанту резервуарів відрізняються геометрією жорсткої оболонки покриття. Для першого варіанту – жорстка конусна оболонка покриття, для іншого варіанту – жорстка сегментна оболонка покриття. Всі інші геометричні параметри, кількість і вид скінченних елементів, умови кріплення і види навантажень однакові. Циклів оптимізації для розрахунку в двох варіантах – 20. Були побудовані цільові функції по циклам оптимізації. Діаграми показали, що вага паливного резервуару з жорсткою конусною оболонкою покриття є 155.2 тони. Паливний резервуар з сегментної жорсткою оболонкою покриття має вагу 187.5 тони. Таким чином, паливний резервуар з жорсткою конусною оболонкою покриття на 32.3 тони має вагу менше, за резервуар з сегментною жорсткою оболонкою покриття, при цьому максимальні напруження по Мізесу і переміщення по осям  $X, Y, Z$ , знаходяться в межах допустимого значення. Можемо зробити висновок, що паливний резервуар з жорсткою конусною оболонкою покриття є більш оптимальним рішенням.

**Ключові слова:** Метод скінченних елементів (МСЕ), цільова функція, параметрична оптимізація, циліндричний паливний резервуар з жорсткою оболонкою покриття, статичне навантаження, динамічне навантаження.

**Вступ.** При проектуванні і будівництві промислових резервуарів для зберігання нафтових і хімічних продуктів в регіонах де присутнє сейсмічне

навантаження дуже важливо проаналізувати всі комбінації навантажень, які діють на споруду, а також вибрати оптимальне рішення для такої конструкції. Як правило, такі резервуари поділяються на: підземні і надземні. Надземні поділяються в свою чергу на: резервуари з плаваючим дахом і з жорстким покриттям. В даній роботі розглядаються циліндричні резервуари без підтримуючих ребр з жорсткими оболонками покриття, щоб оцінити, як впливає жорстке кріплення на загальні напруження по Мізесу, та загальні переміщення, і як при автоматизованому оптимальному проектуванні змінюється товщина оболонки, відповідно, і її маса конструкції.

Одним із головних етапів при постановці задачі параметричної оптимізації для циліндричних резервуарів з жорсткими оболонками покриття є вибір матеріалу, побудова скінчено-елементної моделі та використання різних видів скінчених елементів, так як їх можна моделювати за допомогою: стержневих, пластинчастих, оболонкових, об'ємним тілом. Це все впливає на максимальне до реальних умов моделювання задач параметричної оптимізації, правильність і точність результату, а також на складність роботи.

Підходи до вирішення задачі параметричної оптимізації важливих і складних конструкцій, досвід будівництва і проектування яких – обмежений, а аналогічні проекти можуть відрізнятися різними особливостями дуже важливий, так як, кожна нова задача з урахуванням постановки та пошуку оптимального рішення має наукову цінність для розкриття проблеми параметричної і топологічної оптимізації просторових конструкцій. Також це стосується конструкцій масового виробництва, за допомогою таких задач є можливість зменшення маси конструкції, витрат матеріалів і сировини та підбір раціональної технології монтажу конструкції з урахуванням архітектурної виразності будівлі чи споруди, та різних геометричних параметрів конструкції.

Для вирішення задач параметричної оптимізації розглядається математичний метод градієнтного спуску, який був запропонованим Розеном. Мета методу – за допомогою вихідних даних шляхом ітерацій знаходити оптимальне рішення для конструкції при заданих змінних проектування і обмеженнях, які накладаються на відгук конструкції. Традиційний метод проектування конструкції передбачає задання попередніх розмірів, побудова скінчено-елементної моделі та виконання статичного і динамічного розрахунку за двома граничними станами. Потім виконується корегування параметрів конструкції, з урахуванням розрахунку і перехід до безпосереднього проектування конструкції та її вузлів з'єднання з іншими конструкціями. Метод градієнтного спуску передбачає без попередніх підборів поперечного перерізу конструкції та її моделювання, що проводиться з урахуванням вихідних даних та способи з'єднання конструкції з жорстким диском землі або іншими конструкціями, а також врахування об'єктивних причин.

Класичним прикладом вирішення задачі оптимального проектування математичним методом градієнтного спуску є підбір поперечного перерізу

стерженьової конструкції під дією комбінації зовнішніх навантажень. Для складних конструкцій, або цілих будівель і споруд, при задані скінчено-елементній моделі підбір поперечного перерізу конструкції зводиться до підбору її частин, виходячи із рівнянь статички, що виражають залежність внутрішніх зусиль від зовнішніх навантажень.

Для статично невизначених конструкцій при використанні класичного підходу проектування необхідно задання жорсткості окремих елементів конструкції та розрахунок класичними методами будівельної механіки. В цьому випадку розподіл зусиль в конструкції або її частин визнається умовами сумісної деформації частин конструкції і правильності задання вихідних даних, щоб отримати реальні результати. Також необхідно вдале задання розмірів перерізу конструкції, так як це впливає на жорсткість конструкції. При використанні математичного методу градієнтного спуску, цього можна уникнути так як достатньо правильно побудувати просторову скінчено-елементну модель і задання комбінації зовнішніх навантажень.

При розв'язування задачі параметричної оптимізації, слід приділити увагу методу її вирішення, а також практичного його використання. Враховуючи, що результат повинен враховувати безліч факторів і вихідні даних, щоб довести розрахунок до результату, необхідно мати теоретичну частину, яка буде сформована і прийнята в сучасній практиці проектування і задовольняти методи розрахунку конструкцій будівельної механіки.

При нелінійному розрахунку оболонкових конструкцій, слід враховувати, що всі оболонкові конструкції підкорюються законам лінійно-деформованим системам. Їх фізичною нелінійністю можна знехтувати за рахунок деталізації та характеру роботи сталевих конструкцій, так як автоматизоване оптимальне проектування конструкції ми розглядаємо тільки в межах пружної роботи сталі.

Вихідні дані та просторова розрахункова модель конструкції описує її напружено-деформований стан, цей стан можна виразити за допомогою рівнянь або нерівностей. Об'єднані єдиною функцією цілі обмеження, можливості рішення, є математичною моделлю задачі, яка в будь-якому випадку - нелінійна, так як має нелінійну залежність взаємозв'язку між параметрами об'єкта, що проектується, в залежності від того, які з них прийняті, і які можуть змінюватися. Навіть у відносно вузьких задачах підбору оптимального поперечного перерізу оболонки, які описують пошук розмірів перерізу є нелінійним відносно невідомих параметрів.

**Аналіз публікацій.** На теперішній час в галузі будівельних конструкцій і будівельній механіки є великий досвід постановки і вирішення задач параметричної оптимізації з використанням математичного методу градієнтного спуску при побудові розрахункових моделей за допомогою методу скінчених елементів та аналітичних методів будівельної механіки. Модифікованих метод градієнтного спуску для оптимального проектування будівельних конструкцій використовується в роботі [1]. Автоматизована параметрична оптимізація за допомогою математичного методу градієнтного спуску для оболонки з урахуванням статичних і динамічних навантажень, або оптимізація власних частот коливань розглядається в роботах [2-4]. В більшості, узагальнення варіаційних методів Лагранжа і

Кастільяно, які використовуються до задач оптимального проектування стержневих систем приводиться у роботі [5]. Використання методу скінчених елементів до вирішення задач у сучасному будівництві використовується в роботі [6].

**Мета статті.** Дослідження параметричної оптимізації паливних резервуарів з жорсткими оболонками покриття з урахуванням статичних і динамічних навантажень, побудова цільової функції по циклам оптимізації. Зробити висновки по даним дослідженням.

**Теоретичні відомості.** В оптимізації паливних резервуарів використовується математичний метод проекції градієнта при побудові розрахункової моделі методом скінчених елементів для вирішення задач параметричної оптимізації [1]. В теорії оптимального проектування розглядаються задачі визначення форми, розрахункової моделі, внутрішніх властивостей і умов роботи конструкції, які приводять до екстремуму (мінімум чи максимум) вибраної характеристики конструкції при додаткових обмеженнях.

Коли вибрані змінні проектування, задачу оптимального проектування можна сформулювати у вигляді, що представлені в роботах [2-4]. Основний етап при рішенні задачі оптимального проектування системи, яка деформується, є вибір математичної моделі самої системи, матеріалу з якого вона виконана. В залежності від співвідношень основних геометричних параметрів, розмірів, мова може йти про оболонкову систему. Важливим етапом є також вибір моделі матеріалу системи (пружний, пружно-пластичний, жорстко-пластичний и т.д.) Крім того, матеріал може бути ізотропним, ортотропним або анізотропним. Нарешті, математична модель конструкції може бути лінійною, або геометрично чи фізично нелінійною. Важливе значення різних технічних вимог, пропорованих до конструкції, що проектується, виражається в багатьох критеріях оптимальності і обмежень, необхідних при оптимальному проектуванні конструкції, що приводить до великого різноманіття задач оптимального проектування.

Знайти такий проект  $S$  (вектор  $\vec{X}_k$ ), що

$$\begin{aligned} h_k(S) &= 0 \text{ при } k = 1; 2; \dots \dots k_n \\ g_j(S) &\leq 0 \text{ при } j = 1; 2; \dots \dots j_n. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Функція  $\varphi(S)$  мінімальна. Через  $S$  позначена деяка точка в просторі проектування, яка визначається певними вибраними змінними. В більшості задачах умови на функціонали  $h_k$  і  $g_j$  визначаються обмеженнями на поведінку конструкції під навантаженням, але деякі із них можуть відображати задані розділи підпростору проектування.

Питання в тому, має задача, визначення в загальному вигляді умови (1.1) рішення, залишається відкритим і лиш в окремих випадках може бути вирішена на основі фізичної інтуїції. Теж саме можна сказати і відносно єдиного рішення.

Із (1.1) випливає, що якщо  $S$  є оптимальним рішенням, то малі варіації  $\delta S$  всередині підпростору проектування задовольняють вимоги.



$$\begin{aligned}
 \delta h_k(\mathbf{S}) &= 0 && \text{при } k = 1; 2; \dots \dots k_n \\
 \delta g_j(\mathbf{S}) &\leq 0 && \text{для всіх } j, \text{ при яких} \\
 \delta g_j(\mathbf{S}) &\leq 0 && g_j(\mathbf{S}) = 0.
 \end{aligned} \tag{1.2}$$

Це класична варіаційне формулювання являється необхідною умовою оптимального рішення.

Умову (1.2) можна представити в іншій, часто більш зручній формі. Для простоти припустимо, що змінні проектування визначають  $N$  дійсних чисел, так, що простір проектування можна представити як  $N$ -вимірне еквівалентне простору.

Позначимо через  $S$  деяке допустиме рішення, а через  $\delta S$  його довільну варіацію в межах підпростору проектування. Якщо  $h_k(\mathbf{S}) = 0$ , то варіації  $\delta S$  перпендикулярна по всім векторам  $\nabla h_k(\mathbf{S})$  ( $k = 1; 2; \dots k_n$ ), де набла- оператор  $\nabla$  означає градієнт. Подібним чином обмеження у вигляді активних нерівностей  $g_j(\mathbf{S}) = 0$  потребують, щоб варіація  $\delta S$  не мала компонент в позитивному напрямку  $\nabla g_j(\mathbf{S})$

Звідси можна зробити висновок, що для будь-яких дійсних чисел  $\lambda_k \geq 0$  і  $\gamma_j \geq 0$  проекції  $\delta S$  на вектор

$$\sum_{k=1}^n \lambda_k \nabla h_k(\mathbf{S}) + \sum_j \gamma_j \nabla g_j(\mathbf{S}) \tag{1.3}$$

не позитивний. Символ  $\sum_j$  позначає, що сума обмежена лиш тими значеннями  $j$ , для котрих  $g_j(\mathbf{S}) = 0$ . Іншими словами, будь-який напрямок, який має компоненту в будь-якому із напрямків (1.3), веде за межі визначеного простору.

Щоб зменшити цільову функцію  $\varphi$ , необхідно рухатися в напрямку, який має будь-яку позитивну компоненту в негативному напрямку  $\nabla \varphi$ , але якщо цей напрямок  $-\nabla \varphi$  є будь-яким із напрямків (1.3), то ніякий рух всередину допустимого простору не приведе до зменшення цільової функції. Отже, в будь-якій із оптимальних точок  $-\nabla \varphi$  є одним із напрямком (1.3). Використовуючи цю обставину, можна зробити висновок, якщо  $S$  є оптимальним рішенням, то існує ряд таких дійсних чисел  $\gamma_j \geq 0$  і додатних чисел  $\lambda_k$  що

$$-\nabla \varphi(\mathbf{S}) = \sum_{k=1}^n \lambda_k \nabla h_k(\mathbf{S}) + \sum_j \gamma_j \nabla g_j(\mathbf{S}). \tag{1.4}$$

Формула (1.4) виражає умову оптимізації Куна-Таккера. Коли немає активних обмежень – нерівностей, величину  $\lambda_k$  можна інтерпретувати як множники Лагранжа. Для задачі без обмежень умови Куна-Таккера зводиться до умови  $\nabla \varphi = 0$ .

Оскільки відношення 1.2, 1.3 задовольняє будь-які стаціонарні рішення, вони самі по собі не можуть забезпечити глобальну оптимізацію, але вони створюють основу, на яку будуть посилатися більшість досліджень по оптимальному проектуванню.

Щоб впевнитися в глобальності будь-якого із досягнутих мінімумів, необхідно провести додаткові дослідження. Зокрема, якщо допустимий

простір проектування випуклий, цільовий функціонал або випуклий, або ввігнутий, то деякі теореми нелінійного програмування можуть давати важливу інформацію, відносно глобальності, а також про становище можливого рішення [7].

Якщо цільова функція  $\varphi$  є унімодальною (маючи один екстремум), то пошук оптимального рішення спрощується. Мультимодальні функції можуть мати деякі оптимальні рішення. Для таких функцій глобальне оптимальне рішення надає собою найменше значення  $\varphi(\mathbf{S}^*)$ , тоді як локальні оптимальні рішення представляють собою найменше значення  $\varphi(\vec{X}_k)$  в околиці оптимального проекту  $\mathbf{S}^*$ . Як для глобального, так і для локального мінімуму  $\varphi(\mathbf{S}^*) \leq \varphi(\mathbf{S})$ , але для глобального оптимального рішення це відношення виконується для всіх  $\vec{X}_k$  в  $\mathbf{E}^n$ , тоді для локального оптимального рішення цей простір має місце тільки для деякої околиці.

На практиці припущення про те, що локальний екстремум є глобальним, може бути перевірено шляхом використання деяких початкових векторів, але навіть якщо знайдено одне найменше локальне рішення, в загальному випадку, неможливо показати, що це рішення обов'язково є глобальним оптимальним проектом. Цільова функція є позитивною і володіє єдиним екстремумом. Цей факт встановлюється на основі понять випуклості і увігнутості функції.

Функція  $\varphi(\vec{X}_k)$  називається випуклою в області  $R$ , якщо для любых векторів  $\vec{X}_{k1}$  і  $\vec{X}_{k2} \in R$

$$\varphi(\theta \vec{X}_{k1} + (1 - \theta) \vec{X}_{k2}) \leq \theta \varphi(\vec{X}_{k1}) + (1 - \theta) \varphi(\vec{X}_{k2}). \quad (1.5)$$

Якщо має місце нерівність, що зворотна (1.5) то функція називається ввігнутою.

Диференціальна випукла функція володіє наступними властивостями

1.  $\varphi(\vec{X}_{k2}) - \varphi(\vec{X}_{k1}) \geq \nabla^T \varphi(\vec{X}_{k1})(\vec{X}_{k2} - \vec{X}_{k1})$ ; для всіх  $\vec{X}_{k1}$  і  $\vec{X}_{k2}$ ;

2. матриця  $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j}$  (матриця Гессе) позитивно напів визначена;

3. В області  $R$  функція  $\varphi(\vec{X}_k)$  має тільки один екстремум.

З поняття випуклості витікає важливий результат математичного програмування. Якщо мінімізація функції  $\varphi$  випукла і кожна функція  $g_j(\vec{X}_k)$ , яка задає обмеження у вигляді нерівності – увігнута функція, то локальний мінімум являється також і глобальним мінімумом. І аналогічно локальний максимум увігнутої функції являється глобальним максимумом [1].

**Результати числових досліджень.** Важливий елемент постановки задачі оптимального проектування – вибір механічної моделі процесу деформування, яка відображає фізичні закони дослідного процесу і реальні властивості матеріалів, математично виражених у вигляді рівняння стану. Коефіцієнти чутливості, які використовуються в цьому пошуковому процесі, розраховуються в ході аналізу чутливості підбору товщини оболонок паливних резервуарів.

Параметрична оптимізація дозволяє знайти оптимум конструкції в ході мінімізації або максимізації призначеної цільової функції. В процесі оптимізації паливних резервуарів підбираються фізичні параметри поперечного перерізу оболонок, що є проектними змінними. При зміні проектних невідомих повинно виконуватися обмеження, для нашого випадку, це максимальні напруження і переміщення, які накладені на відгук конструкції і на змінні проектування.

В ході аналізу чутливості розраховується відношення, коли необхідно модифікувати конструкцію, яка неефективна, щоб можна було запропонувати варіанти для зменшення її поперечного перерізу, що приведе до зменшення маси. Головна ціль оптимізації – автоматизувати для даної задачі процес підбору поперечного перерізу, використовуючи для знаходження кращого варіанту конструкції чисельних методів.

Математичне представлення задачі проектування називається загальною формулюванням задачі оптимізації можна записати так:  $F(\mathbf{X}) \rightarrow \min$ , де  $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$  - змінні проектування. При цьому повинні виконуватися нерівність  $\sigma_{\max} \leq \sigma_{\text{adm}}$ .

Об'єктом оптимізації є два варіанта паливного резервуару. Перший варіант, коли жорсткою оболонкою покриття є конус, другий варіант, коли жорсткою оболонкою покриття є сфера. Розміри, кількість скінченних елементів, кількість унікальних властивостей для кожного скінченного елементного елемента, змінні проектування по товщині від 1 до 100 мм і обмеження по напруженням 260 МПа і 15 мм на прогин по кожній із осей  $X, Y, Z$ , є однаковими. Товщина до оптимізації оболонок 15 мм. Вага конструкцій однакова. Цикли оптимізації для обох варіантах становить – 20.

Навантаження на паливні резервуари задавалося згідно [2]. Були задані наступні навантаження: власна вага несучого каркасу, снігове, вітрове, технологічне навантаження від людей, сейсмічне навантаження. Була обрана сама небезпечна комбінація навантажень і за цією комбінацією виконувався безпосередньо розрахунок на параметричну оптимізацію оболонок паливних резервуарів. Мета цього розрахунку мінімізувати вагу матеріалу паливних резервуарів при заданому комбінованому навантаженні.

**Загальні висновки.** В статті розглянуто дослідження параметричної оптимізації просторових конструкцій, а саме циліндричних паливних резервуарів з жорсткими оболонками покриття, розрахункові моделі представлені на рис. 1 та 2. Розглядалося два варіанта дослідження паливних резервуарів, а саме: з конусною жорсткою оболонкою покриття і сегментною жорсткою оболонкою покриття. Максимальні напруження по Мізесу для циліндричного паливного резервуару з жорсткою конусною оболонкою покриття становить 262.3 МПа, що менше ніж допустимі напруження по Мізесу, представлено на рис. 3, для паливного резервуару з жорсткою сегментною оболонкою покриття становить 260.5 МПа, що менше ніж допустимі напруження по Мізесу, представлено на рис. 4. Загальні переміщення для циліндричного резервуару з конусною жорсткою оболонкою покриття становить 53.26 мм, що менше ніж допустиме переміщення, представлено на рис. 7, для паливного резервуару

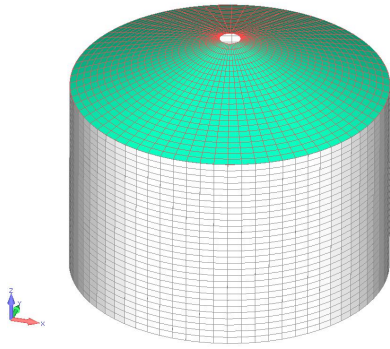


Рис. 1. Розрахункова скінчено-елементна модель паливного резервуару з жорсткою оболонкою покриття конус

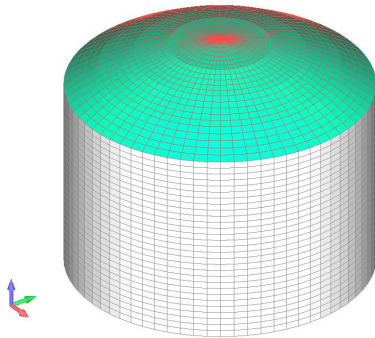


Рис. 2. Розрахункова скінчено-елементна модель паливного резервуару з жорсткою сегментною оболонкою покриття

з жорсткою сегментною оболонкою покриття становить 51.54 мм, що менше ніж допустиме переміщення, представлено на рис. 8. При однакових геометричних розмірах конструкцій, однаковій кількості скінченних елементів, однаковим зовнішнім статичним і динамічним навантаженням маємо наступні результати: паливний циліндричний резервуар з конусною оболонкою покриття має вагу після оптимізації 155.2 т, для циліндричного паливного резервуару з жорсткою сегментною оболонкою покриття 187.5 т, це представлено на рис. 9 і 10. Таким чином циліндричний паливний резервуар з конусною жорсткою оболонкою покриття після оптимізації має вагу на 32.3 т менше. Можна зробити висновок, що при даному зовнішньому статичному і динамічному навантаженні паливний резервуар з жорсткою конусною оболонкою покриття є більш оптимальним варіантом ніж паливний резервуар з жорсткою сегментною

оболонкою покриття.

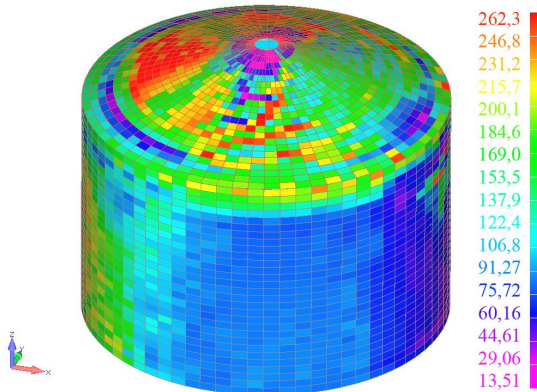


Рис. 3. Загальні напруження паливного резервуару по Мізесу в МПа після оптимізації з жорсткою оболонкою покриття конус

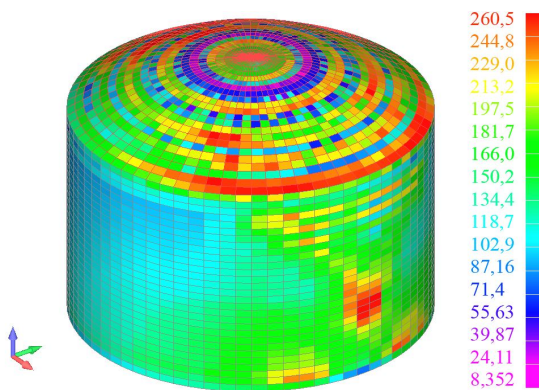


Рис. 4. Загальні напруження паливного резервуару по Мізесу в МПа після оптимізації з жорсткою сегментною оболонкою покриття

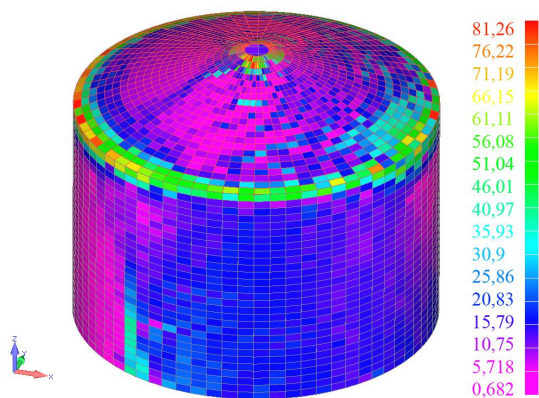


Рис. 5. Розподіл товщини паливного резервуару з жорсткою оболонкою покриття конус після оптимізації в мм

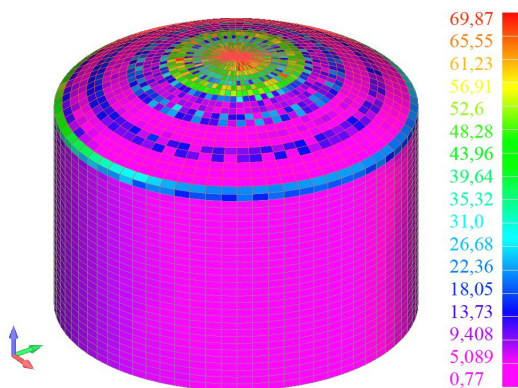


Рис.6. Розподіл товщини паливного резервуару з жорсткою сегментною оболонкою покриття після оптимізації в мм

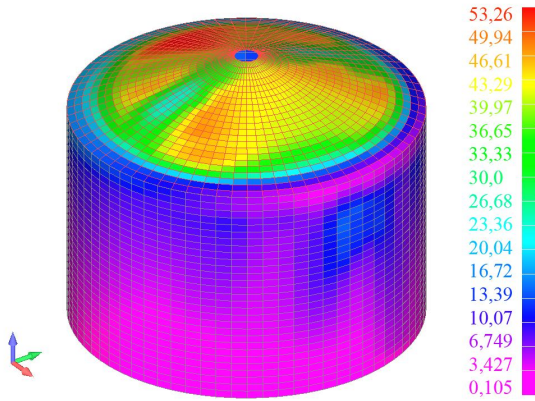


Рис. 7. Розподіл загальних переміщень паливного резервуару з жорсткою оболонкою покриття конус після оптимізації в мм

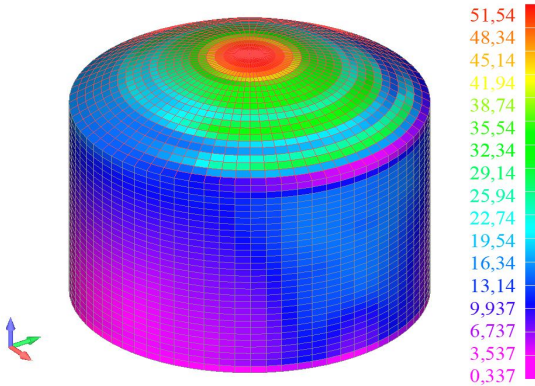


Рис. 8. Розподіл загальних переміщень паливного резервуару з жорсткою сегментною оболонкою покриття після оптимізації в мм

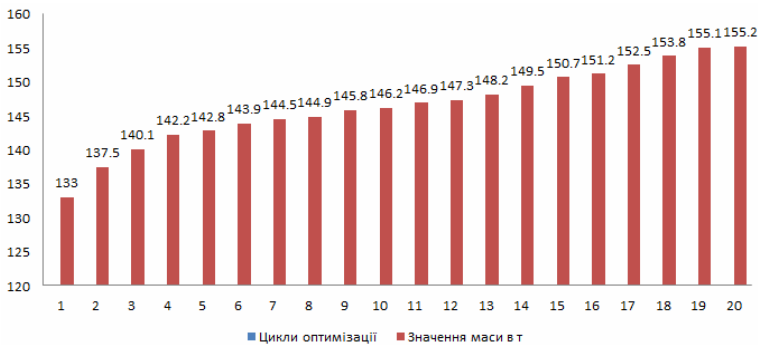


Рис. 9. Діаграма збільшення маси паливного резервуару з жорсткою оболонкою покриття конус по циклам оптимізації

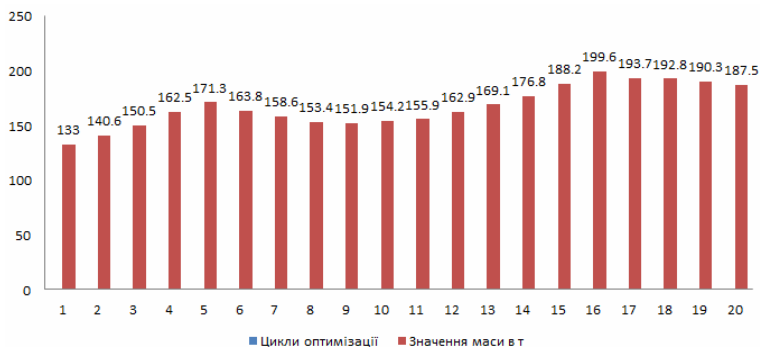


Рис. 10. Діаграма збільшення маси паливного резервуару з сегментною жорсткою оболонкою покриття по циклам оптимізації

#### СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Пермяков В.О., Перельмутер А.В.* Оптимальное проектирование стальных стержневых конструкций. – К: ООО “Издательство Сталь”, 2008.– 538 с.;
2. *Косhevий О.О.* Оптимізація паливних резервуарів з жорсткими оболонками покриття за власними частотами коливання /Восточно Европейский научный журнал/ – Варшава 2019 – №45 – С. 21-32.
3. *Гайдайчук В.В., Косhevий О.О.* Чисельне рішення задач оптимального проектування при обмеженні власних частот коливання пологої оболонки зі зламками / В.В. Гайдайчук, О.О. Кошевий // Сучасні проблеми архітектури та містобудування: наук.-техн. збірник. К.: КНУБА. 2018. Вип.51.– С.416 – 425.
4. *Косhevий О.О.* Параметрична оптимізація і розрахунок на прогин оболонки при дії статичних комбінованих навантажень // Містобудування та територіальне планування: наук.-техн. збірник: К.: КНУБА. 2018. Вип.67.– С. 212-220.
5. *Клюев С.В.* Оптимальное проектирование стержневых систем // Издательство БГТУ//, 2007 – 248 с. г. Белгород.
6. *Волков Е.А.* Новые направления оптимизации в проектировании строительных конструкций //Сборник статей государственной технологической университет имени В.Г. Шухова// Издательство БГТУ, 2006 – 91 с. г. Белгород.

#### REFERENCES

1. *Permyakov V.O., Perelmuter A.V.* Optimal'noe proektirovanie stal'nyh stержnevyykh konstrukcij (Optimal design of steel rod structures). K: LLC “Steel publishing house”, 2008. – 538 p.
2. *Kosheviy O.O.* Optimizacija palivnykh rezervuariv z zhorstkimi obolonkami pokrittja za vlasnymi chastotami kolivannja (Optimization of reservoirs with well covered shells with own frequency frequencies) / East European Science journal – Warsaw 2019 - № - 45 – p. 21-32.
3. *Gaydaychuk V.V., Kosheviy O.O.* Chisel'ne rishennja zadach optimal'nogo proektuvannja pri обмеzheni vlasnih частот kolivannja pologoї obolonki zi zlamkami (Numerical solution of problems in optimal design while limiting the natural frequency of the vibrations of shallow shell with breaks) / V.V. Gaydaychuk, O.O. Kosheviy //Present problems architecture and urban planning scien.-digest. K: KNUBA 2018 Mag: 51. – p.416-425.
4. *Kosheviy O.O.* Parametrichna optimizacija i rozrahunok na progin obolonok pri dii statichnih kombinovanih navantazhen' (Parametric optimization and deflection of the shells under combined static loads) // Urban and territorial planning: scien.-digest. K: KNUBA 2018 Mag: 67 – p. 212-220.
5. *Klyuev S.V.*, Optimal'noe proektirovanie stержnevyykh sistem (Optimal design of rods systems) //BSTU Publishing House. 2007. P. 248, Belgorod.
6. *Volkov E.A.*, Novye napravlenija optimizacii v proektirovanii stroitel'nykh konstrukcij (New directions of optimization in the design of building structures) // Digest of articles State Technological University named after V.G. Shukhov// BSTU Publishing House, 2006. P. 91, Belgorod.

*Koshevyi O.O.*

### **OPTIMAL DESIGN OF CYLINDRICAL TANKS WITH HARD SHELL COVER.**

The article considers parametric optimization of cylindrical fuel tanks with hard coating shells. In the designing and constructing of industrial tanks for the preservation of oil and chemical products in the region where seismic loading occurs, it is very important to analyze all combinations of loads that affect to the structures, and it is important to choose the optimal solution of such construction. As a rule, such reservoirs are divided: underground and ground. Ground tanks are divided into: tanks with a floating lid, and with a lid that is rigidly fixed. Tanks are considered only shell structures, without additional stiffening ribs.

To solve the problems of parametric optimization, we consider the mathematical method of gradient descent, which was proposed by Rosen. The purpose of the method is to find the optimal solution for the structure using the input data through iterations design variables, and constraints that are superimposed on the response of the construction. The gradient descent method involves without preliminary selection of the structural cross-section of the construction and its modeling, which, taking into account the incoming data, leads to methods of connecting the structure to the hard disk of the earth or other structures, as well as to objective reasons.

Two versions of the calculated spatial models of fuel tanks were constructed using the finite element method. External static and dynamic loads in the form of seismic were set, since the construction of reservoirs is considered in seismically active regions of Ukraine. Using the new technique, design variables were set in the form of a shell thickness of 1 to 100 mm and Mises stress limits of 260 MPa and displacements along the  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$ , 15 mm axes. The objective function is the mass of the fuel tank. Tank options differ in the geometry of the lid. For the first option - conical, for the second option - segmented. All geometric parameters, the number and type of finite elements, fixing conditions and types of loading are the same. The optimization cycles for calculating in two variants are 20. The objective function was built on the optimization cycles. The diagrams showed that the weight of the melted tank with a conical cover is 155.2 tons, for a fuel tank with a segment cover 187.5 tons. Thus, the fuel tank with a conical cover weighs 32.3 tons less than with a segment cover, and the maximum stresses by Mises and displacement along the axes  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$ , is unacceptable limits. We can conclude that a fuel tank with a conical cover of rigid fastening is a better option.

**Key words:** Finite Element Method (FEM); objective function; objective optimization; cylindrical fuel tank with a hard coating shell; static loads; dynamic loads.

*Кошевой О.О.*

### **ОПТИМАЛЬНОЕ ПРОЕКТИРОВАНИЕ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ РЕЗЕРВУАРОВ С ЖЕСТКИМИ ОБОЛОЧКАМИ ПОКРЫТИЯ.**

В статье рассмотрено исследование параметрической оптимизации цилиндрических топливных резервуаров с жесткими оболочками покрытия. В проектирование и строительство промышленных резервуаров для сохранения нефтяных и химических продуктов в регионе, где возникает сейсмическая нагрузка очень важно проанализировать все комбинации нагрузок, какие действуют на сооружения, а также прийти к оптимальному решению для такой конструкции. Как правило, такие резервуары разделяют: подземные и наземные. Наземные резервуары разделяются на: резервуары с плавающей крышкой, и с крышкой, которая жестко закреплена. Резервуары рассматриваются без дополнительных ребер жесткости, только оболочечные конструкции.

Для решения задач параметрической оптимизации рассматривается математический метод градиентного спуска, какой был предложенным Розеном. Цель метода – с помощью входящих данных путем итераций находить оптимальное решение для конструкции при заданных переменных проектирования и ограничений, какие накладываются на отклик конструкции. Метод градиентного спуска предполагает без предварительных подборов поперечного сечения конструкции та её моделирование, что приводит с учетом входящих данных та способы соединения конструкции с жестким диском земли или другими конструкциями, а также учетом объективных причин.

Были построены два варианта расчетных пространственных моделей топливных резервуаров с помощью метода конечных элементов. Были заданы внешние статические и динамические нагрузки в виде сейсмике, так как строительство резервуаров рассматривается в сейсмоактивных районах Украины. С помощью новой методики были заданы переменные проектирования, а именно толщина оболочки от 1 до 100 мм и ограничения напряжений по Мизесу 260 МПа и перемещения по осям  $X, Y, Z$ , 15 мм. Целевая функция – масса топливного



резервуара. Варианты резервуаров отличаются геометрией крышки. Для первого варианта – конусная, для второго варианта – сегментная. Все геометрические параметры, количество и вид конечных элементов, условия закрепления и виды нагрузок одинаковы. Циклов оптимизации для расчета в двух вариантов – 20. Были построены целевая функция по циклам оптимизации. Диаграммы показали, что вес топливного резервуара с конусной крышкой является 155,2 тонн. Топливный резервуар с сегментной крышкой весит 187.5 тонн. Таким образом, топливный резервуар с конусной крышкой на 32.3 т весит меньше, чем с сегментной крышкой, при этом максимальные напряжения по Мизесу и перемещения по осям X,Y,Z, находятся в пределах допустимого. Можем сделать вывод, что топливный резервуар с конусной крышкой жесткого закрепления является более оптимальным вариантом.

**Ключевые слова:** Метод конечных элементов (МКЭ), целевая функция, параметрическая оптимизация, цилиндрический топливный резервуар с жесткой оболочкой покрытия, статические нагрузки, динамические нагрузки.

УДК 539.3

*Koshevii O.O. Optimalne proektuvannya cylindrychnykh rezervuariv z jorstkimi obolonkami pokryttia // // Опір матеріалів і теорія споруд. – 2019. К: КНУБА, 2019. – Вип. 103. - С. 253-265.*

*Rozglynuto doslidzhennya parametrychnoi optimizatsii palivnykh cylindrychnykh rezervuariv z jorstkimi obolonkami pokryttia. Otrymani napruzhennya po Mizesu i zagalnyi peremishchennya prostорових konstruktsiyi piсля rozrahunku optimizatsii ta pobudovani diagramy tsilьovoi funktsii, ta зроблені висновки по даному doslidzhenniu.*

Табл. 0, Ил. 8, Диаг. 2 Библиогр. 6 назв.

UDC 539.3

*Koshevii O.O. Optimal design of cylindrical tanks with hard shell cover // Strenght of materials and theory of structures. - 2019. To: KNUBA, 2019. - Vip. 103. - P. 253-265.*

*The article describes parametric optimization of fuel cylindrical tanks with hard shell cover. Stresses by Mises and the general displacements of the spatial structures after optimization calculation were obtained, and the diagrams of the objective function were constructed. The conclusions were made.*

Табл. 0, Fig. 8, Diag. 2, Ref 6.

УДК 539.3

*Koshevoi O.O. Optimalnoe proektirovaniye cylindrycheskikh rezervuarov s jorstkimi obolonkami pokrytiya // Опір матеріалів і теорія споруд. – 2019. К: КНУБА, 2019. – Вип. 103. - С. 253-265.*

*Rassmotreno issledovanie parametrycheskoi optimizatsii toplivnykh cylindrycheskikh rezervuarov s jorstkimi obolonkami pokrytiya. Polucheny napruzhennya po Mizesu i obicnye peremeshchennya prostранственныkh konstruktsiyi после расчёта оптимизации и построены диаграммы целевой функции, сделаны выводы по данному исследованию.*

Табл. 0, Ил. 8, Диаг. 2. Библиогр. 6 назв.

**Автор:** аспірант кафедри теоретичної механіки КНУБА Кошевий Олександр Олександрович

**Адреса робоча:** 03680 Україна, м. Київ, проспект Повітрофлотський, 31, Київський національний університет будівництва і архітектури, кафедра теоретичної механіки.

**Робочий тел.:** +38(044) 241-55-36

**Мобільний тел.:** +38(050) 725-87-00

**Імейл:** a380982070137@gmail.com

**ORCID ID:** <http://orcid.org/0000-0002-1903-2905>

## ЗМІСТ

<i>Bazhenov V.A., Krivenko O.P., Vorona Yu.V.</i> Effect of heating on the natural vibrations of thin parabolic shells . . . . .	3
<i>Nguyen Anh Tuan, Nguyen Tuan Phuong</i> Evaluation on stress distribution, deformation rate in embankment and soft soil reinforced concrete pile combined geotextile below the embankments in geological conditions mekong delta . . . . .	17
<i>Баженов В.А., Погорелова О.С., Постнікова Т.Г.</i> Четверта міжнародна конференція “Recent Advances in Nonlinear Mechanics” RANM2019 (“Останні досягнення в нелінійній механіці”) . . . . .	33
<i>Barabash M.S., Romashkina M.A., Bashynska O.U.</i> Thermal stress state of reinforced concrete floor slab . . . . .	43
<i>Пискунов С.О., Шкріль О.О., Максим’юк Ю.В.</i> Визначення тріщиностійкості ротора парової турбіни при дії об’ємних сил . . . . .	57
<i>Solodei I.I., Petrenko E. Yu., Zatyliuk Gh.A.</i> The stress-strain state investigation of underground structures on the basis of soil models with adjusted input parameters . . . . .	63
<i>Solodei I.I., Vabishchevich M.O., Stryhun R.L.</i> Semianalytical finite elements method efficiency in the geometrically nonlinear elastic-plastic problems . . . . .	71
<i>Yurchenko V.V.</i> Searching for shear forces flows in arbitrary cross-sections of thin-walled bars: numerical algorithm and software implementation . . . . .	82
<i>Ловейкін В.С., Почка К.І., Пристайло М.О., Почка О.Б.</i> Динамічне зрівноваження привідного механізму роликвої формувальної установки з енергетично врівноваженим приводом . . . . .	112
<i>Лук’янченко О.О., Ворона Ю.В., Костіна О.В.</i> Вейвлет-аналіз сейсмічної хвильової реакції каркасних будівель . . . . .	131
<i>Баулін Д.С., Манжура С.А., Одейчук М.П., Одейчук А.М., Горєлишев С.А., Ільченко М.І.</i> Розрахунок бронестійкості металевих багатошарових броньованих структур за допомогою методу скінченних елементів . . . . .	145
<i>Семенець С.М., Насонова С.С., Олевський В.І., Волчок Д.Л.</i> Управління проектною надійністю нафтових резервуарів . . . . .	165

*Панченко С.П., Масленников С.О., Головаха М.Л.*

Оцінка ефективності фіксації розрізу капсули кульшового суглоба поліпропіленовою сіткою . . . . . 177

*Романюк В.В., Супрунюк В.В.*

Експериментальні дослідження прольотних конструкцій з перфорованих елементів за складного напружено-деформованого стану . . . . . 189

*Василенко Л.Г.*

Оболонка – композиційний елемент архітектурного об'єкту . . . . . 201

*Мірошніков В.Ю., Денисова Т.В., Проценко В.С.*

Дослідження першої основної задачі теорії пружності для шару з циліндричною порожниною . . . . . 208

*Слободянюк С.О., Буратинський А.П.*

Деформаційний розрахунок просторових залізобетонних рам МСЕ з урахуванням віброповзучості бетону . . . . . 219

*Палій О.М., Лук'янченко О.О.*

Вплив геометричних характеристик конічних оболонок на динамічну стійкість . . . . . 235

*Левківський Д.В., Каверин К.О., Сович Ю.В.*

Дослідження точності модифікованого методу прямих при розрахунку вісесиметричних тіл . . . . . 243

*Кошевий О.О.*

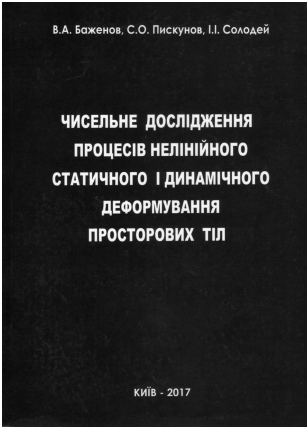
Оптимальне проектування циліндричних резервуарів з жорсткими оболонками покриття . . . . . 253

## Вийшли з друку наукові видання

Баженов В.А., Пискунов С.О., Солодей І.І.

**Чисельне дослідження процесів нелінійного статичного і динамічного деформування просторових тіл** / В.А. Баженов, С.О. Пискунов, І.І. Солодей - Київ: Вид-во "Каравела", 2017. -308 с.

ISBN 978-966-2229-98-1



У книзі викладений новий підхід до чисельного аналізу широкого кола задач механіки суцільного середовища, який ґрунтується на використанні ефективної модифікації методу скінченних елементів - напіваналітичного МСЕ (НМСЕ). Розглянуто задачі статичного деформування при тривалому статичному і циклічному навантаженні та задачі стаціонарних і нестаціонарних процесів динамічного деформування для фізично і геометрично неоднорідних просторових тіл. Проведений аналіз достовірності і ефективності розроблених підходів і методик, наведені приклади їх застосування до розв'язання практичних задач моделювання напружено-деформованого стану відповідальних об'єктів

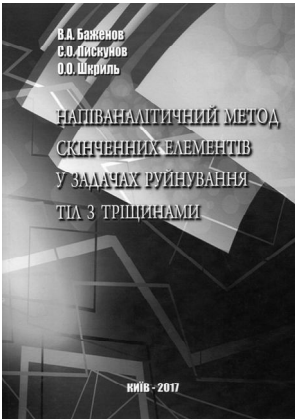
енергетичного та транспортного машинобудування, будівництва, інших галузей промисловості.

Призначена для наукових працівників, викладачів, аспірантів, магістрів, студентів вищих технічних навчальних закладів.

Баженов В.А., Пискунов С.О., Шкриль О.О.

**Напіваналітичний метод скінченних елементів у задачах руйнування тіл з тріщинами** / В.А. Баженов, С.О. Пискунов, О.О. Шкриль - Київ: Вид-во "Каравела", 2017. - 208 с.

ISBN 978-966-2229-99-8



У книзі запропонований новий підхід до розв'язання задач механіки руйнування просторових тіл, який ґрунтується на використанні ефективної модифікації методу скінченних елементів - напіваналітичного МСЕ. Розглянуто питання обчислення критеріальних параметрів механіки руйнування - параметру Гріффітса,  $J$ -інтеграла Черепанова-Райса і коефіцієнта інтенсивності напружень (КІН) та особливості реалізації відповідних обчислювальних процедур у межах НМСЕ. Проведений аналіз достовірності і ефективності розроблених підходів та методик, наведені приклади їх застосування до розв'язання практичних задач тріщиностійкості з урахуванням нелінійного деформування і

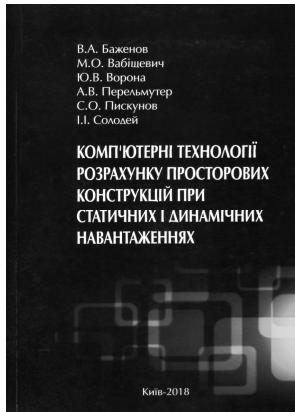
впливу об'ємних навантажень.

Призначена для наукових працівників, викладачів, аспірантів, магістрів, студентів вищих технічних навчальних закладів.

Баженов В.А., Вабіщевич М.О., Ворона Ю.В., Перельмутер А.В.,  
Пискунов С.О., Солодей І.І.

**Комп'ютерні технології розрахунку просторових конструкцій при статичних і динамічних навантаженнях** /В.А. Баженов та ін. - Київ: Вид-во "Каравела", 2018. - 312 с.

ISBN 978-966-2229-90-5



В книзі викладені теоретичні основи методу скінченних елементів (МСЕ), принципи його застосування при формуванні розрахункових моделей та висвітлені явища і ефекти, які мають місце при чисельному розв'язанні задач. Розглянуті питання побудови розв'язків задач динаміки і їх практичного застосування та постановки і особливості розв'язання задач нелінійного деформування, які здебільшого не висвітлюються в стандартних курсах підготовки фахівців в профільних технічних університетах. Описана ефективна модифікація МСЕ - напіваналітичний МСЕ, наведено приклади його використання в задачах статичного і динамічного деформування для фізично і геометрично неоднорідних просторових тіл -

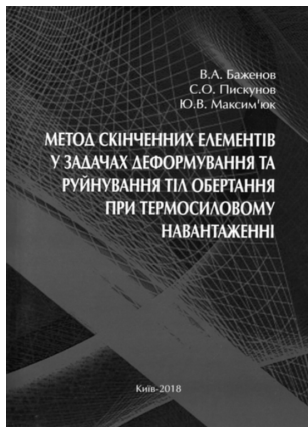
відповідальних об'єктів енергетичного та транспортного машинобудування, будівництва, а також інших галузей промисловості.

Книга розрахована на науково-технічних працівників у галузі механіки деформівного твердого тіла, комп'ютерної будівельної механіки, проектувальників, викладачів, аспірантів, магістрів, студентів старших курсів вищих технічних навчальних закладів.

Баженов В.А., Пискунов С.О., Максим'юк Ю.В.

**Метод скінченних елементів у задачах деформування та руйнування тіл обертання при термосиловому навантаженні.** Монографія — К.: Каравела 2018.-316 с.

ISBN 978-966-2229-85-1



В монографії наведені результати створення на основі моментної схеми методу скінченних елементів (МССЕ) ефективного чисельного підходу до комплексного розв'язання лінійних, фізично і геометрично нелінійних задач деформування, стійкості, континуального і дискретного руйнування, контактної взаємодії та нестационарної теплопровідності тонкостінних, масивних і комбінованих тіл обертання складної структури в умовах термосилового навантаження. Зазначені постановки задач є характерними при визначенні несучої здатності і ресурсу відповідальних об'єктів енергетичного та транспортного машинобудування, будівництва інших галузей промисловості.

Призначена для науково-технічних працівників, викладачів, докторантів, аспірантів, магістрів, студентів старших курсів вищих технічних навчальних закладів.

Наукове видання

**ОПР МАТЕРІАЛІВ І ТЕОРІЯ СПОРУД**  
**STRENGTH OF MATERIALS AND THEORY OF STRUCTURES**

---

Науково-технічний збірник  
Scientific-and-technical collected articles

Випуск 103

Головний редактор В.А.Баженов

Підп. до друку 28.09.19. Формат 60x90 <sup>1</sup>/<sub>16</sub>. Папір друк №1.  
Друк офсетний. Умовн. друк. арк.  
Тираж 100.

---

КНУБА  
м. Київ, Повітрофлотський пр., 31. 03680

---